

Devoir Libre 3

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation de la copie. Les réponses aux différentes questions seront séparées par un trait horizontal et les résultats seront encadrés. L'usage de la calculatrice ou de tout autre instrument de calcul (téléphone, ordinateur ...) est formellement interdit.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle non linéaire :

$$y' = y^2 - (2t - 1)y + t^2 - t + 1 \quad (E).$$

Le but de l'exercice est de trouver des solutions réelles définies sur un intervalle le plus grand possible.

1. Y a-t-il des solutions constantes à cette équation ?
2. Déterminer une solution de la forme $f : t \mapsto at + b$ vérifiant $f(1) = 1$.
3. En posant $z = y - f$, montrer que si y est une solution de (E) alors z est une solution de :

$$z' = z^2 + z \quad (E_2).$$

4. En posant $w = \frac{1}{z}$, montrer que si z est une solution de (E_2) qui ne s'annule pas sur I alors w est solution sur I de :

$$w' + w = -1 \quad (E_3).$$

5. Déterminer les solutions de (E_3) définies sur $\mathbb{R}$.
6. En déduire une famille de solutions de (E_2) . On sera EXTREMEMENT PRUDENT quand au domaine de définition de ces fonctions.
7. En déduire que les solutions de (E) définies sur un intervalle de taille maximale sont les applications :
 $f, g_a : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{ae^{-t}-1} + t \end{cases} \quad \text{lorsque } a \in \mathbb{R}_-, \quad g_a^- : \begin{cases}]-\infty, \ln(a)[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{ae^{-t}-1} + t \end{cases} \quad \text{et } g_a^+ : \begin{cases}]\ln(a), +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{ae^{-t}-1} + t \end{cases} \quad \text{lorsque } a \in \mathbb{R}_+^*.$
8. Représenter sur un même graphique les courbes de ces fonctions (en choisissant quelques valeurs de a)

Exercice 2

On cherche dans cet exercice toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(2f(x) + 1).$$

On va pour cela raisonner par analyse et synthèse.

1. Soit donc f une telle fonction. Prouver que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer une équation linéaire du second ordre vérifiée par f .
3. En posant $g(t) = f(e^t)$, déterminer une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont g est solution.
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire les solutions possibles de l'équation de départ.
6. Conclure.

Exercice 3

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 6y' - 7y = 8e^x$.
2. Déterminer l'unique solution y de (E) telle que : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.