Devoir Maison numéro 4

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation de la copie. Les réponses aux différentes questions seront séparées par un trait horizontal et les résultats seront encadrés. L'usage de la calculatrice ou de tout autre instrument de calcul (téléphone, ordinateur ...) est formellement interdit.

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - x$ définie sur $[0; +\infty[$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique réel $x_n \in [0; +\infty[$ tel que $f(x_n) = n$.
2. En utilisant que $f(x_n) = n$, montrer que $\forall n \geq 1, \quad x_n \geq ln(n)$.
3. En déduire la limite de (x_n) en $+\infty$.
4. (a) Vérifier que $\ln(1 - \frac{x_n}{e^{x_n}}) = \ln(n) - x_n$.
   (b) Redémontrer que $\frac{\ln(1-x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -1$.
   (c) En déduire que que $\lim \frac{\ln(n)}{x_n} = 1$.

Exercice 2

On pose $f(x) = \frac{2^x - x^2}{x-2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Problème

Soit (a_n) une suite réelle positive, décroissante qui tend vers 0. Considérons la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

1. Montrer que les suites S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes. En déduire la convergence de (S_n).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mid S_{2n} - l \mid \leq a_{2n+1}$ et $\mid S_{2n+1} - l \mid \leq a_{2n+2}$.
3. Dans cette question on suppose que pour tout $k \in N$, $a_k = \frac{1}{k+1}$.
   (a) Donner la nature de la suite définie par $L_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum\limits_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}^{n} \frac{1}{k+1}$.
   (c) En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \leq \int\limits_{n}^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$, montrer que :
   $$\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ avec } p < q, \text{ on a } \ln(\frac{q+2}{p+1}) \leq \sum_{k=p}^{q} \frac{1}{k+1} \leq \ln(\frac{q+1}{p}).$$
   (d) Préciser la limite de L_n et en déduire à partir de quel rang L_n sera à coup sur proche de sa limite à 10^{-3} près.

Problème 2

1. (a) On définit les fonctions f et g sur $[0, \pi]$ par :

$$\forall x \in [0, \pi],\ f(x) = x + \sin(x) \text{ et } g(x) = x - \sin(x).$$

Dresser les tableaux de variations de f et g. Représenter la courbe de f dans un repère orthonormé. On précisera également les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 0 et π.

(b) Montrer que : $\forall x \in [0, \pi],\ 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{6}$.

2. Soit $\alpha \in]0, \pi]$. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + sin(u_n)$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, \pi]$.

(b) Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

3. On définit dans la suite :$\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = \pi - u_n$.

(a) Prouver que, pour tout $n \in N$, $\varepsilon_n \in [0, \pi]$ et $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - sin(\varepsilon_n)$.

(b) Montrer qu'il existe un entier N tel que $\varepsilon_N \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$.

(c) Montrer alors que : $\forall n \geq N,\ 0 \leq \varepsilon_n \leq \sqrt{6}(\frac{1}{2})^{3^{n-N}}$.

4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble E des fonctions $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continues sur $[0, \pi]$ telles que $h = h \circ f$, autrement dit :

$$\forall x \in [0, \pi],\ h(x) = h(x + sin(x)).$$

(a) Soit une fonction h élément de E.

i. On définit alors la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = h(u_n)$. Justifier que cette suite converge ; quelle est sa limite ?

ii. Montrer que la suite (v_n) est constante. En déduire une autre expression de sa limite.

iii. Montrer que la fonction h est constante sur $[0, \pi]$.

(b) Déterminer l'ensemble E.