$\mathbb{D}$evoir Surveillé 1

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation de la copie. Les réponses aux différentes questions seront séparées par un trait horizontal et les résultats seront encadrés. L'usage de la calculatrice ou de tout autre instrument de calcul (téléphone, ordinateur ...) est formellement interdit.

Exercice 0

1. Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

2. Soit $t \neq -1$. On pose $A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}$ et $B=(1+t^2)(1+t)^2$
   Simplifier le plus possible le produit AB.

3. Simplifier au maximum :

$$\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x^2-4}+\frac{2}{x^2-2x}$$

4. Développer, réduire et ordonner l'expression suivante selon les puissances décroissantes de x :

$$(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$$

Exercice 1

On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\frac{e^{2x}}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Donner le tableau de signe de f'' sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Donner la limite de f en 0_+.
6. Donner la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2

Une urne contient 3 boules bleues et 7 boules rouges. On tire successivement 2 boules sans remise.

1. Faire un arbre de probabilité pour illustrer la situation.
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue puis une boule rouge ?
3. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge ?
4. Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule rouge ?

Exercice 3

Nier la propriété mathématique suivante :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in \mathbb{R}, \mid x - 1 \mid \leq \eta \Rightarrow \mid x^2 - 1 \mid \leq \epsilon.$$

Exercice 4

On définit une suite en posant $u_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0.85 u_n + 1.8$.

1. Trouver $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = 0.85l + 1.8$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - l$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Donner alors une expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. Calculer alors $\lim u_n$.

Exercice 5 :

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$.

1. Caluler $f(f(x))$ et simplifier au maximum.
2. Calculer $f(f(f(x)))$ et simplifier au maximum.
3. A votre avis, que vaut $\underbrace{f \circ ... \circ f}_{\text{n fois}}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$?
4. Démontrer l'hypothèse formulée à la question précédente par récurrence.