Devoir Surveillé 2

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation de la copie. Les réponses aux différentes questions seront séparées par un trait horizontal et les résultats seront encadrés. L'usage de la calculatrice ou de tout autre instrument de calcul (téléphone, ordinateur ...) est formellement interdit.

Exercice 0

1. On a $\frac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}} = \frac{(-2)^{2k}\times(-2)\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}} = (-2)\times 3^{3k-2}$.
2. On a $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x(x+1)-2(x-1)-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x-2x+2-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$.
3. On a
$$(6x-8)(4x-5)+36x^2-64 = (6x-8)(4x-5)+(6x-8)(6x+8) = (6x-8)(4x-5+6x+8) = (6x-8)(10x+3).$$
4. La dérivée de f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+1)+\frac{e^x}{x^2+1}$ est
$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{e^x(x^2+1)-e^x 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}\left(2x + e^x\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right).$$

Exercice 1

1. On a $\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^2 = 1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. On a $\sum_{k=1}^{n+4}(-3)^k = -3+(-3)^2+...+(-3)^{n+4} = (-3)\frac{1-(-3)^{n+4}}{1-(-3)} = \frac{-3}{4}(1-(-3)^{n+4})$.
3. On a
$$\begin{aligned}\sin^5(x) &= \left(\tfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5\\ &= \tfrac{e^{5ix}-5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}-10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}-e^{-5ix}}{32i}\\ &= \tfrac{e^{5ix}-e^{-5ix}-5(e^{3ix}-e^{-3ix})+10(e^{ix}-e^{-ix})}{32i}\\ &= \tfrac{\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)}{16}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos^5(x) &= \left(\tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5\\ &= \tfrac{e^{5ix}+5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}+10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}-+e}{32}\\ &= \tfrac{e^{5ix}+e^{-5ix}+5(e^{3ix}+e^{-3ix})+10(e^{ix}+e^{-ix})}{32}\\ &= \tfrac{\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos(x)}{16}\end{aligned}$$
4. Ainsi
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\sin(x)^5dx &= \int_0^{\pi/4}\tfrac{\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)}{16}dx\\ &= -\tfrac{1}{16}[\tfrac{\cos(5x)}{5} - 5\tfrac{cos(3x)}{3} + 10\cos(x)]_0^{\pi/4}\\ &= -\tfrac{1}{16}\left(\tfrac{-\sqrt{2}/2-1}{5} - 5\tfrac{-\sqrt{2}/2-1}{3} + 10(\sqrt{2}/2-1)\right)\\ &= -\tfrac{1}{16}\left(\tfrac{172\sqrt{2}/2-128}{15}\right)\\ &= \tfrac{8}{15} - \tfrac{86\sqrt{2}}{15\times16}\\ &= \tfrac{8}{15} - \tfrac{43\sqrt{2}}{241}\end{aligned}$$
.
5. On a $e^{i\pi/3}+e^{i\pi/6} = e^{i\pi/4}\left(e^{i\pi/12}+e^{-i\pi/12}\right) = e^{i\pi/4}2\cos(\pi/12)$.

Exercice 2

1)

Intéressons nous à la fonction : $x^2 - 4x + 3$, sa dérivée est $2x - 4$ qui s'annule en 2.
La fonction est donc décroissante sur $]-\infty, 2]$ et est donc bijective de $]-\infty, 2]$ sur $[-1, +\infty[$
Soit $y \in [-1, +\infty[$. Résolvons $x^2 - 4x + 3 = y$.
On a $x^2 - 4x + 3 - y = 0$. On calcule le discriminant :
$\Delta = 16 - 4(3 - y) = 4 + 4y$ qui est positif vu que $y \in [-1, +\infty[$.
Et donc $x = \frac{4 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ mais comme la solution doit être dans $]-\infty, 2]$ la solution est $x = \frac{4 - \sqrt{\Delta}}{2}$.
On a donc $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{1 + y}$.

2)

Intéressons nous à la fonction : $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ sa dérivée est $f'(x) = \frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$ qui ne s'annule pas. La fonction f est donc croissante de $I =]-2, +\infty[$ vers $J =]-\infty, 2[$ (Calculer la limite en $+\infty$ c'est facile).
Soit $y \in J$. Résolvons $f(x) = y$. avec $x \in I$
$\frac{2x-1}{x+2} = y \Leftrightarrow 2x - 1 = y(x + 2) \Leftrightarrow (2 - y)x = 2y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{2-y}$
Donc $f^{-1}(y) == \frac{2y+1}{2-y}$.

Exercice 3

- $iz^2 + iz + 1 + i = 0$.

Calculons :

$$\Delta = i^2 - 4.i.(1 + i) = 3 - 4i$$

On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \mp 1 \end{cases}$. Je chosis $\delta = 2 - i$.
Il y a donc deux solutions : $z_1 = \frac{-i-2+i}{2i} = i$ et $z_2 = \frac{-i+2-i}{2i} = -1 - i$.

- $z^2 - (1 + 3i)z + 2i - 2 = 0$.

Calculons :

$$\Delta = (1 + 3i)^2 - 4.1.(2i - 2) = 1 - 9 + 6i - 8i + 8 = -2i$$

On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \mp 1 \end{cases}$. Je chosis $\delta = 1 - i$.
Il y a donc deux solutions : $z_1 = \frac{1+3i+1-i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \frac{1+3i-1+i}{2} = 2i$.

Problème

Les différentes parties de ce problème sont indépendantes. On considère la fonction f ci-dessous :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z + \frac{1}{z} \end{cases} .$$

Partie I – Étude de la fonction f

1. On cherche $z \in \mathbb{C}^*$ tel que :
$$\begin{array}{llll} & f(z) & = & i \\ \Leftrightarrow & z + \frac{1}{z} & = & i \\ \Leftrightarrow & z^2 + 1 & = & iz \\ \Leftrightarrow & z^2 - iz + 1 & = & 0 \end{array} .$$
On calcule $\Delta = (-i)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. Une racine carrée est $\delta = \sqrt{3}i$ et les solutions sont $\frac{i \pm \sqrt{3}i}{2}$.

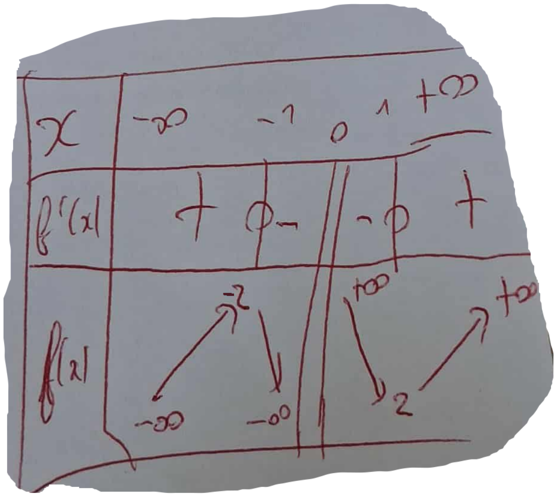
2. Le nombre i ayant 2 antécédents, la fonction n'est pas injective.

3. Soit $y \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}^*$ tel que :
$$f(z) = y \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = y \Leftrightarrow z^2 + 1 = y \Leftrightarrow z^2 - yz + 1 = 0$$
Or quoi qu'il arrive ($\Delta = 0$ ou $\Delta \neq 0$) on va trouver des solutions. La fonction est donc surjective.

4. On procède par double inclusion :
   - Soit $y \in f(\mathbb{U})$. Il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $y = f(z)$ or comme $z \in \mathbb{U}$ alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Ainsi
   $$y = f(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta).$$
   On a bien $y \in [-2, 2]$.
   - Réciproquement soit $y \in [-2, 2]$ alors $\frac{y}{2} \in [-1, 1]$ et donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\frac{y}{2} = \cos(\theta) \Leftrightarrow y = 2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = f(e^{i\theta})$$
   donc y est bien image par f du nombre $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

5.
   - Soit $z \in \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$. Si $z \in \mathbb{U}$ alors $f(z) \in [-2, 2] \subset \mathbb{R}$ et c'est bon. Si $z \in \mathbb{R}^*$ alors $f(z) = z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^*$ comme addition et quotient de réels.
   - Soit $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$. Cela signifie que $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z + \frac{1}{z}) = 0$. Si on écrit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors
   $$Im(z + \frac{1}{z}) = 0 \Leftrightarrow Im(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}) = 0 \Leftrightarrow y(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1$$
   On a donc bien $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in \mathbb{U}$ de plus comme $z \neq 0$ (cf espace de départ) $z \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Or la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ a pour dérivée $x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$ et pour tableau de variation :



Ses valeurs sont bien $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

7. On note $\mathbb{D}^*$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

   (a) Soit $z \in \mathbb{D}^*$. On doit montrer que $f(z) \notin [-2, 2]$. Par l'absurde supposons que $f(z) \in [-2, 2]$. Comme $[-2, 2] \subset \mathbb{R}$, que les antécédents de $\mathbb{R}^*$, c'est $\mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$ et que $z \notin \mathbb{U}$, forcément $z \in \mathbb{R}^*$. Or $f(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R} \backslash]-2, 2[$. La seule possibilité est que $f(z) = \pm 2$ donc que $z = \pm 1$. Mais $\pm 1 \notin \mathbb{D}^*$. Il n'y a donc aucune possibilité pour que $f(z) \in [-2, 2]$.

   (b) Soit $y \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$, on cherche $z \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\begin{array}{rrcl} & f(z) & = & y \\ \Leftrightarrow & z^2 - yz + 1 & = & 0 \end{array}$$

   On a $\Delta = y^2 - 4 \neq 0$ car $y \neq \pm 2$. Il existe donc 2 solutions. Si $\delta^2 = \Delta$, ces solutions sont $\frac{y \pm \delta}{2}$. Lorsqu'on les multiplie on obtient :

$$\frac{y+\delta}{2} . \frac{y-\delta}{2} = \frac{y^2 - \delta^2}{4} = \frac{y^2 - y^2 + 4}{4} = 1.$$

   (c) On a déjà montrer que si on restreint f au départ à $\mathbb{D}^*$, on arrive bien dans $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Lors de notre recherche d'antécédents à la question précédente on a trouvé 2 solutions il faut montrer qu'exactement une des 2 est dans $\mathbb{D}^*$. Le produit des 2 antécédents vaut 1, donc le module du produit vaut aussi 1. Il y a 2 possibilités :

   - Un des deux antécédents a un module plus petit que 1 et l'autre plus grand que 1 (par exemple 2 et 1/2)
   - Les deux antécédents ont pour module 1 ce qui est impossible car (qu 4) si l'antécédent est de module 1 alors l'image est dans $[-2, 2]$ ce qui est exclu ici.

   On a bien montré que tout $y \in C \setminus [-2, 2]$ avait exactement un antécédent par f dans $\mathbb{D}^*$.

Partie II – Une suite d'applications

On définit une suite de fonctions $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (chaque fonctionϕ_n est définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$) par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \phi_0(z) = 2 \text{ et } \phi_1(z) = z$$

et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \phi_{n+2}(z) = z\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z)$$

1. On a $\phi_2 = z\phi_1(z) - \phi_0(z) = z^2 - 2$, $\phi_3 = z\phi_2(z) - \phi_1(z) = z^3 - 2z - z = z^3 - 3z = z(z^2 - 3)$ et

$$\phi_4 = z\phi_3(z) - \phi_2(z) = z^4 - 3z^2 - z^2 + 2 = z^4 - 4z^2 + 2$$

.

2. Résolvons :
   - $\phi_2(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 = 2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}$
   - $\phi_3(z) = 0 \Leftrightarrow z(z^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = \pm\sqrt{3}$
   - $\phi_4(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 - 4z^2 + 2 \underset{Z=z^2}{\Leftrightarrow} Z^2 - 4Z + 2 = 0$, on a $\Delta = 16 - 8 = 8$ et $Z = \pm(2 + \sqrt{2})$ donc $z = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ou $z = \pm i\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On montre par récurrence la propriété P_n : "$\phi_n(f(z)) = f(z^n)$"

   Initialisation :
   - $\phi_0(f(z)) = 2$ et $f(z^0) = f(1) = 2$ donc P_0 est vraie
   - $\phi_1(f(z)) = f(z) = f(z^1)$ donc P_1 est vraie

   Hérédité :

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n et P_{n+1} sont vraies.

   $$\phi_{n+2}(f(z)) = f(z)\phi_{n+1}(f(z)) - \phi_n(f(z)) = f(z)f(z^{n+1}) - f(z^n) = (z + \frac{1}{z})(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}) - z^n - \frac{1}{z^n} = z^{n+2} - \frac{1}{z^{n+2}} = f(z^{n+2})$$

   et P_{n+2} est vraie.

   Conclusion :

   On a bien $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \phi_n(f(z)) = f(z^n)$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Résolvons $f(z^n) = 0 \Leftrightarrow z^n + \frac{1}{z^n} = 0 \Leftrightarrow z^{2n} + 1 = 0 \Leftrightarrow z^{2n} = -1 \Leftrightarrow z \in \{e^{i\frac{\pi}{2n} + i\frac{2k\pi}{2n}} \mid k \in [\![0, 2n-1]\!]\}$

   (b) On a déduit que $\phi_n(z) = 0 \Leftrightarrow f(z^n) = 0 \Leftrightarrow z \in \{e^{i\frac{\pi}{2n} + i\frac{2k\pi}{2n}} \mid k \in [\![0, 2n-1]\!]\}$.