

Devoir Surveillé 3

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation de la copie. Les réponses aux différentes questions seront séparées par un trait horizontal et les résultats seront encadrés. L'usage de la calculatrice ou de tout autre instrument de calcul (téléphone, ordinateur ...) est formellement interdit.

Exercice 0 : Calcul littéral

- Factoriser sans utiliser Δ le polynôme $25 - (10x + 3)^2$.
- Simplifier pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$.
- Rendre rationnels le dénominateur puis simplifier $\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
- Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
- On pose $a = x - \frac{1}{x}$. Exprimer en fonction de a uniquement : $x^3 - \frac{1}{x^3}$

Exercice 1 : Calcul prépa

- Calculer $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt$ par intégrations par parties.
- Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^3(t) \cos^3(t) dt$ en posant $u = \sin(t)$.
- Calculer $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$ en posant $u = \frac{1}{t}$.
- Résoudre le système suivant :

$$S_1 \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & +y & -z = 0 \\ & 2y & +z = 3 \\ & & z = 2 \end{array} \right.$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$: $iz^2 + iz + 1 + i = 0$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$

- Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $1 + t^3 = (1+t)(at^2 + bt + c)$.
- Trouver $d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{1+t^3} = \frac{d}{t+1} + \frac{et+f}{at^2+bt+c}$
- En déduire $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des solutions des equations différentielles :

- $y' + \sin(t)y = \sin(2t)$.
- $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$. On cherchera une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-2t}$.

Problème

On note f la fonction donnée par

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{2 - \cos x}.$$

Partie 1

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Etudier la parité de f .
(b) Prouver que f est 2π -périodique.
(c) Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe représentative sur $\mathbb{R}$. Justifier votre réponse.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x .
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse π .
5. (a) Etudier le signe de la dérivée f' sur $[0, \pi]$.
(b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
(c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On rappelle qu'une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près est 1,732.

Partie 2

1. (a) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
(b) En déduire la valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{2 - \cos t} dt.$$

2. On considère l'équation différentielle $(E) : y'(x) + \frac{\sin x}{2 - \cos x} y(x) = 2 \sin x$.
 - (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée à (E) .
 - (b) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a \cos(x) + b$ où a et b sont des réels à déterminer.
 - (c) Résoudre complètement (E) sur $\mathbb{R}$.
 - (d) Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$.