Devoir Surveillé 3

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation de la copie. Les réponses aux différentes questions seront séparées par un trait horizontal et les résultats seront encadrés. L'usage de la calculatrice ou de tout autre instrument de calcul (téléphone, ordinateur ...) est formellement interdit.

Exercice 0 : Calcul littéral

1. Si $f(x) = \ln(x^2+1)$ alors $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
2. Si $g(x) = e^{x^3}$alors $g'(x) = 3x^2e^{x^3}$
3. Si $h(x) = \cos(\sin(x))$ alors $h'(x) = -\cos(x)\sin(\sin(x))$
4. Si $i(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^5$ alors $i'(x) = 5\left(1+\frac{1}{x}\right)^4 \times \frac{-1}{x^2}$
5. Si $j(x) = \exp(\cos(\ln(1+x^2)))$ alors $j'(x) = \exp(\cos(\ln(1+x^2))) \times (-\sin(\ln(1+x^2))) \times \frac{2x}{1+x^2}$

Exercice 1 : Calcul prépa

1. En posant $u = \ln(t)$ et donc $du = \frac{dt}{t}$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t(2+\ln^2(t))} = \int_0^{\ln(x)} \frac{du}{2+u^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}Arctan(\frac{t}{\sqrt{2}})\right]_0^{\ln(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}Arctan(\frac{\ln(x)}{\sqrt{2}})$$

2. On a

$$\int_0^1 t^3e^{t^2}dt = \int_0^1 \underbrace{t^2}_{u} \times \underbrace{te^{t^2}}_{v'}dt = [t^2\frac{e^{t^2}}{2}]_0^1 - \int_0^1 te^{t^2}dt = \frac{e}{2} - [\frac{e^{t^2}}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$$

3. Pour l'équation :

$$z^2-(3+4i)z-1+5i = 0.$$

On a

$$\Delta = (3+4i)^2 - 4\times 1\times(-1+5i) = 9-16+24i+4-20i = -3+4i = (1+2i)^2$$

On a donc deux solutions :

$$z_1 = \frac{(3+4i)-(1+2i)}{2} = 1+i \text{ et } z_2 = \frac{(3+4i)+(1+2i)}{2} = 2+3i$$

4. Pour résoudre l'équation différentielle :

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{1}{1+t^2}.$$

On détermine

$$S_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln(x)} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{x} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

puis on cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$ et donc $f'(x) = \frac{\lambda'(x)x-\lambda(x)}{x^2}$. On injecte dans l'équation pour obtenir

$$\lambda'(x)\times\frac{1}{x} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

On prend $\lambda(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ donc $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2x}$ ce qui nous donne un ensemble de solutions

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{x} + \frac{\ln(1+x^2)}{2x} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 2

1. On a écrit la formule de Moivre

$$\begin{array}{rcl}\cos(5\theta)+i\sin(5\theta) & = & (\cos(\theta)+i\sin(\theta))^5 \\ & = & \cos(\theta)^5+5i\cos(\theta)^4\sin(\theta)-10\cos(\theta)^3\sin(\theta)^2-10i\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3+5\cos(\theta)\sin(\theta)^4+i\sin(\theta)^5\end{array}$$

   ce qui permet d'écrire en identifiant parties réelles et imaginaires

   $\cos(5\theta)=\cos(\theta)^5-10\cos(\theta)^3\sin(\theta)^2+5\cos(\theta)\sin(\theta)^4$ et $\sin(5\theta)=5\cos(\theta)^4\sin(\theta)-10\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3+\sin(\theta)^5$

   Ainsi $\tan(5\theta)=\frac{\sin(5\theta)}{\cos(5\theta)}=\frac{\cos(\theta)^5-10\cos(\theta)^3\sin(\theta)^2+5\cos(\theta)\sin(\theta)^4}{5\cos(\theta)^4\sin(\theta)-10\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3+\sin(\theta)^5}$

2. En divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos(\theta)^5$on obtient :

$$\tan(5\theta)=\frac{1-10\frac{\sin(\theta)^2}{\cos(\theta)^2}+5\frac{\sin(\theta)^4}{\cos(\theta)^4}}{5\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}-10\frac{\sin(\theta)^3}{\cos(\theta)^3}+\frac{\sin(\theta)^5}{\cos(\theta)^5}}=\frac{1-10\tan^2(\theta)+5\tan^4(\theta)}{5\tan(\theta)-10\tan^3(\theta)+\tan^5(\theta)}$$

Problème

Partie 1

1. On a, pour tout réel x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

2. (a) On sait que $\tan(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}-}{\longrightarrow} +\infty$ et $\tan(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}+}{\longrightarrow} -\infty$ donc dans tous les cas $g(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$.

   (b) On a $g'(x) = -\frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$ et donc $g'(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1$.

   On en déduit que g prolongée en $\pi/2$ par l est une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{sin^2(x)}$

3. On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto \tan(\frac{x}{2})$ et $f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan(\frac{x}{2})\right)$

   (a) Pour Df_1, on veut $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi$ donc $Df_1 = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$
   Pour Df_2, on veut $\tan(\frac{x}{2}) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[+k\pi \Leftrightarrow x \in]0, \pi[+2k\pi$ donc $Df_2 = \mathbb{R}\backslash\{a + 2k\pi \mid z \in \mathbb{Z}$ et $a \in]-\pi, 0[\}$

   (b) On a alors
   $$\forall x \in Df_1,\ f_1(x + 2\pi) = \tan(\frac{x + 2\pi}{2}) = \tan(\frac{x}{2} + \pi) = \tan(\frac{x}{2})$$
   $$\forall x \in Df_2,\ f_2(x + 2\pi) = \ln(\tan(\frac{x + 2\pi}{2})) = \ln(\tan(\frac{x}{2} + \pi)) = \ln(\tan(\frac{x}{2}))$$
   donc les fonctions sont 2π périodiques.

   (c) Par théorème généraux,f_1 et f_2 sont dérivables sur Df_1 et Df_2.

   (d) On a, pour tout réel $x \in Df_1$,
   $$f_1'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$
   .

   (e) On a, pour tout réel $x \in Df_2$
   $$f_2'(x) = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\tan(\frac{x}{2})} = \frac{1 + \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{2\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}} = \frac{\cos^2(x : 2) + \sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}$$

   (f) On en déduit
   $$f_2'(x) = \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2 + x/2)} = \frac{1}{\sin(x)}.$$

   (g) On va étudier f_1 sur $]-\pi, \pi[$ et f_2 sur $]0, \pi[$. Les dérivées sont positives et donc les fonctions sont croissantes. les limites à gauche et à droite de l'intervalle d'étude sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$. De plus $f_1(\pi/2) = 1$ et $f_2(\pi/2) = 0$.

   (h) Graphe à faire (geogebra)

4. On considère la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{1}{cos^2(x)}$.

   (a) On veut $\cos^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ainsi $Df_3 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. La fonction est dérivable sur cet ensemble.

   (b) On a $f_3'(x) = -\frac{-2\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)^4} = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)^4}$ qui est positive $[0, \frac{\pi}{4}]$ donc la fonction est croissante et de plus $f_3(0) = 1$ et $f_3(\pi/4) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$

5. (a) une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ln est $x \mapsto x\ln(x) - x$.

   (b) Soit $\epsilon > 0$. On a $\int_\epsilon^1 \ln(t)dt = [x\ln(x) - x]_\epsilon^1 = \epsilon\ln(\epsilon) - \epsilon + 1$.

   (c) Ainsi
   $$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \ln(t)dt = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon\ln(\epsilon) - \epsilon + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$
   .

Partie 2

On considère l'équation différentielle sur $]0,\pi[$:

$$y''(x)+y(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ (E)}$$

1. On introduit la fonction f_4 qui, à tout réel x de $]0,\pi[$, associe :

$$f_4(x)=\sin(x)\ln\left(\tan(\frac{x}{2})\right)$$

On a, en recyclant le calcul $f_2'(x)=\frac{1}{\sin(x)}$:

$$f_4'(x)=\cos(x)\ln\left(\tan(\frac{x}{2})\right)+\sin(x)\frac{1}{\sin(x)}=\cos(x)\ln\left(\tan(\frac{x}{2})\right)+1$$

$$f_4''(x)=-\sin(x)\ln\left(\tan(\frac{x}{2})\right)+\cos(x)\frac{1}{\sin(x)}$$

Ainsi, pour tout réel x de $]0,\pi[$: $f_4''(x)=-f_4(x)+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

2. L'équation homogène associée à (E) est $y''+y=0$ et d'après le cours

$$S_H=\left\{\begin{array}{ccc}]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(x)+B\sin(x)\end{array} \mid (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

3. On a démontré que f_4 était une solution particulière de l'équation (E) donc les solutions y de (E) sur $]0,\pi[$ sont de la forme : $y=y_0+f_4$ où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à (E).

4. Dans cette question, on souhaite retrouver de façon différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions y de (E) sur $]0,\pi[$ de la forme :

$$x\mapsto y(x)=z(x)\sin(x)$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0,\pi[$.

(a) Si $y(x)=z(x)\sin(x)$ alors $y'(x)=z'(x)\sin(x)+z(x)\cos(x)$ et $y''(x)=z''(x)\sin(x)+2z'(x)\cos(x)-z(x)\sin(x)$. On injecte dans l'équation (E) :

$$\begin{array}{rrcl} & z''(x)\sin(x)+2z'(x)\cos(x)-z(x)\sin(x)+z(x)\sin(x) & = & \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \Leftrightarrow & z''(x)\sin(x)+2z'(x)\cos(x) & = & \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \Leftrightarrow & z''+2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}z' & = & \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\end{array}$$

donc z' est solution sur $]0,\pi[$ de l'équation différentielle $y'+2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}y=\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

(b) On a $a(x)=2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ donc on prend $A(x)=2\ln(\sin(x))$ et donc

$$S_H=\left\{\begin{array}{ccc}]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-2\ln(\sin(x))}\end{array} \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{array}{ccc}]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{\sin^2(x)}\end{array} \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

On cherche ensuite une solution particulière de la forme $f(x)=\frac{\lambda(x)}{\sin^2(x)}$ donc $f'(x)=\frac{\lambda'(x)\sin^2(x)-\lambda(x)2\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)}$, on injece dans l'équation (E')

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{\lambda'(x)\sin^2(x)-\lambda(x)2\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)}+2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\frac{\lambda(x)}{\sin^2(x)} & = & \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ \Leftrightarrow & \frac{\lambda'(x)}{\sin^2(x)} & = & \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ \Leftrightarrow & \lambda'(x) & = & \cos(x)\end{array}$$

On prend $\lambda(x)=\sin(x)$ et $f(x)=\frac{1}{\sin(x)}$.

Ainsi $z'(x)$ est de la forme $\frac{\lambda}{\sin^2(x)}+\frac{1}{\sin(x)}$

(c) On a vu qu'une primitive de $\frac{1}{\sin}$ est $x \mapsto \ln(\tan(x/2))$ et donc $z(x)$ est de la forme $\lambda\frac{\cos(x)}{\sin(x)}+\ln(\tan(x/2))+C$

(d) Ainsi toute solution de (E) sur $]0,\pi[$ est de la forme

$$y(x) = z(x)\sin(x) = \lambda\cos(x) + \sin(x)\ln(\tan(x/2)) + C\sin(x)$$

qui est la forme que l'on cherche.