Corrigé Devoir Surveillé 4

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation de la copie. Les réponses aux différentes questions seront séparées par un trait horizontal et les résultats seront encadrés. L'usage de la calculatrice ou de tout autre instrument de calcul (téléphone, ordinateur ...) est formellement interdit.

Exercice 0 (Calcul)

1. $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{6})\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

2. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(4k(k^2+2)\right) &= 4\sum_{k=0}^{n}k^3 + 8\sum_{k=0}^{n}k \\ &= n^2(n+1)^2 + 4n(n+1) = n(n+1)(n(n+1)+4)\end{aligned}$$

3. On a
$$\frac{2022}{(-2022)^2+(-2021)(2023)} = \frac{2022}{(2022)^2-(2022-1)(2022+1)} = \frac{2022}{(2022)^2-(2022^2-1)} = 2022$$

4. On a :

a) Si $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2+1)$ alors $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

b) Si $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$ alors $f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

c) Si $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2-x)\exp(x^2+x)$ alors $f'(x) = -\exp(x^2+x) + (2-x)(2x+1)\exp(x^2+x) = \exp(x^2+x)(-2x^2+3x+1)$

d) Si $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$ alors $f'(x) = (6\cos(2x))\exp(3\sin(2x))$

Exercice 1

1. On pose $z = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

(a) $\mid z \mid = \mid \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} \mid = \frac{|1+\sqrt{2}+i|}{|1+\sqrt{2}-i|} = 1$ car les deux nombres complexes dde la fraction sont conjugués ...

(b)
$$z = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{\left(1+\sqrt{2}+i\right)\left(1+\sqrt{2}+i\right)}{\mid 1+\sqrt{2}-i\mid^2} = \frac{2+2\sqrt{2}+i\left(2+2\sqrt{2}\right)}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + i\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

(c) Ainsi $z = e^{i\pi/4}$

(d) Alors $z^{2021} = e^{i2021\pi/4} = e^{i(505\pi+\pi/4)} = -z = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

2. On a :
$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3 = 0 \\ x_1+2x_2+x_3 = 3 \\ x_1+x_2+x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3 = 0 \\ 1.5x_2+1.5x_3 = 3 \\ 0.5x_2+1.5x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3 = 0 \\ 1.5x_2+1.5x_3 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

3. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 + (5-11i)z - 22 - 29i = 0$$

Calculons :
$$\Delta = (5-11i)^2 - 4.1.(-22-29i) = 25 - 110i - 121 + 88 + 116i = -8 + 6i$$

On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = -8 \\ 2ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 3 \end{cases}$. Je chosis $\delta = 1+3i$.

Il y a donc deux solutions : $z_1 = \frac{-5+11i-1-3i}{2} = -3+4i$ et $z_2 = \frac{-5+11i+1+3i}{2} = -2+7i$.

Problème 1

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$

1. (a) On a $f_0(x) = x$ cette fonction est croissante et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$ calculons :
$$f_n'(x) = \frac{1.(1+nx^2) - x2nx}{(1+nx^2)^2} = \frac{-nx^2+1}{(1+nx^2)^2}$$
   On cherche les valeurs de $x > 0$ pour lesquelles le numérateur s'annule.
   Il n'y a que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et la dérivée est positive avant et négative après.
   La fonction f_n est donc croissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ puis décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty[$

On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{1}{3}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence
$$u_{n+1} = f_n(u_n)$$

2. On a $u_2 = f_1(u_1) = \frac{u_1}{1+u_1^2} = \frac{1/3}{1+1/9} = \frac{3}{10}$ et $u_3 = f_2(u_2) = \frac{u_2}{1+2u_2^2} = \frac{3/10}{1+2\times 9/100} = \frac{3/10}{118/100} = \frac{30}{118} = \frac{15}{59}$.

3. On montre par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = "u_n > 0"$.
   Initialisation : $u_0 = \frac{1}{3}$ donc P_0vraie
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie.
   $u_{n+1} = f_n(u_n) = \frac{u_n}{1+nu_n^2} > 0$ comme quotient de nombres positifs.
   AInsi P_{n+1} est vraie.
   Conclusion : $u_n > 0$pour tout n .
   On a, pour $n \geq 1$, $1 + nu_n^2 > 1$ donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+nu_n^2} < u_n$ et la suite est décroissante.

4. La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $l \geq 0$.
   On reprend la relation $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+nu_n^2}$. Si $l > 0$, on passe à la limite pour obtenir $l = \frac{l}{+\infty} = 0$ c'est absurde donc la limite est 0.

5. On montre, par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P_n = "u_n \leq \frac{1}{n}".$$
   Initialisation : $u_1 = \frac{1}{3} < 1$ donc P_1 est vraie
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ telle que P_n est vraie. On a alors
$$u_n \leq \frac{1}{n}$$
   Or $[0, \frac{1}{n}] \subset [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ domaine sur lequel f_n est croissante et donc :
$$f_n(u_n) \leq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$$
   donc P_{n+1} est vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{n}$.
   On pose $v_n = nu_n$ puis on calcule
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{n+1}{n}.\frac{1}{1+nu_n^2} = \frac{n+1}{n+n^2u_n^2}$$
   Or $nu_n < 1$ donc $n^2u_n^2 < 1$ et $n + n^2u_n^2 < n+1$. AInsi $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ et (v_n)est croissante. Comme elle est majorée par 1 puis qu'elle converge vers un réel $l' \in]0, 1]$.

6. On a directement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+nu_n^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{nu_n^2}{u_n} = nu_n \leq 1.$$

7. On a alors

$$\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) + \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}}\right) + ... + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) \leq 1 + ... + 1 = n < n+1$$

mais le membre de gauche est télescopique et vaut $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 3$. on multiplie par u_{n+1} pour obtienir $1 - 3u_{n+1} < u_{n+1}(n+1)$ et en passant à la limite $1 \leq l'$ comme on sait déjà que $l' \leq 1$ alors $l' = 1$

Problème 2

Partie 1

1. En utilisant la définition de la fonction sh, on peut écrire

$$2sh(x)+1=0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x}+1=0 \Leftrightarrow (e^x)^2+e^x-1=0.$$

Or le polynôme X^2+X-1 a pour discriminant $1-4\times(-1)=5$ donc ce polynôme possède deux racines réelles qui sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. De plus on peut réécrire

$$X^2+X-1=\left(X-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Il s'ensuit

$$2sh(x)+1=0 \Leftrightarrow \left(e^x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(e^x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ e^x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

On a $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$ et comme la fonction exponentielle est strictement positive, l'équation $e^x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ne possède pas de solution. Par conséquent, l'équation $2sh(x)+1=0$ possède une unique solution α qui est

$$\alpha=\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

2. On a $2sh(\alpha)+1=0$ donc $sh(\alpha)=-\dfrac{1}{2}$. En utilisant la relation $ch^2\alpha - sh^2\alpha=1$, on obtient alors

$$f(\alpha)=(ch\ \alpha)^2+sh(\alpha)=1+(sh\ \alpha)^2+sh(\alpha)=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x)=+\infty$ donc par produit et par addition, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(ch\ x)^2+sh(x)=+\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x)=(ch\ x)^2+sh(x) &= ch(x)\left[ch(x)+\frac{sh(x)}{ch(x)}\right]=ch(x)\left[ch(x)+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right] \\ &= ch(x)\left[ch(x)+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right]. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x)+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=+\infty$. Il s'ensuit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} ch(x)\left[ch(x)+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right]=+\infty.$$

4. Les fonctions ch et sh étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en que produit et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x, on a

$$f'(x)=2ch(x)ch'(x)+sh'(x)=2ch(x)sh(x)+ch(x)=(1+2sh(x))ch(x).$$

En utilisant les résultats des questions 1, on a alors

$$\begin{aligned} f'(x)\le 0 &\Leftrightarrow 1+2sh(x)\le 0 \text{ car } ch(x)\ge 1>0 \\ &\Leftrightarrow x\le\alpha \text{ car } x\mapsto 1+2sh(x) \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

De plus, en utilisant les résultats des questions 2 et 3, on obtient alors le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. La fonction f est décroissante sur $]-\infty,\alpha]$ donc

$$\forall x \in]-\infty,\alpha], \text{ on a } f(x) \geq f(\alpha) = \frac{3}{4} > 0.$$

De plus, la fonction f est croissante sur $[\alpha,+\infty[$, on a

$$\forall x \in [\alpha,+\infty[, \text{ on a } f(x) \geq f(\alpha) = \frac{3}{4} > 0.$$

Ainsi, pour tout réel x, on a bien $f(x) > 0$.

Partie 2

1. Les fonctions sh, exp, et $x \mapsto -x-1$ étant dérivables, la fonction g est dérivable en tant que composée et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x, on a

$$g'(x) = sh'(x)e^{\text{sh } x} - 1 = ch(x)e^{\text{sh } x} - 1.$$

2. Les fonctions ch, exp, et sh étant dérivables, la fonction g' est dérivable en tant que composée , produit et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x, on a

$$g''(x) = ch'(x)e^{\text{sh } x} + ch(x)sh'(x)e^{\text{sh } x} = (sh(x) + ch^2(x)))e^{\text{sh } x} = f(x)e^{\text{sh } x}.$$

3. On a montré dans la question 5 de la partie 1 que f était à valeurs strictement positives. Par conséquent, l'expression de g'' obtenue dans la question précédente montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) > 0.$$

On en déduit que g' est une fonction croissante. De plus, on a $g'(0) = 0$ doncg' est négative sur $]-\infty,0]$ et positive sur $[0,+\infty[$ de quoi l'on déduit que g est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.
Ainsi, d'une part, la fonction g étant décroissante sur $]-\infty,0]$, il vient

$$\forall x \in]-\infty,0], \text{ on a } g(x) \geq g(0) = 0.$$

D'autre part, la fonction g étant croissante sur $[0,+\infty[$, il vient

$$\forall x \in [0,+\infty[, \text{ on a } g(x) \geq g(0) = 0.$$

Ainsi, pour tout réel x, on a bien $g(x) \geq 0$.

4. Soit $x \in [0,1[$, on vient d'établir $g(x) \geq 0$. En reprenant la définition de g, on a donc

$$e^{\text{sh } x} - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 + x \leq e^{\text{sh } x}. \tag{1}$$

Par ailleurs, en appliquant cette même inégalité à $-x$, on obtient

$$1 - x \leq e^{\text{sh}(-x)} = e^{-\text{sh } x} = \frac{1}{e^{\text{sh } x}}.$$

Or $x < 1$ donc $1 - x > 0$. La fonction inverse étant décroissante sur $]0,+\infty[$, il vient

$$e^{\text{sh } x} \leq \frac{1}{1-x}. \tag{2}$$

En combinant les deux inégalités (1) et (2), on a

$$1 + x \leq e^{\text{sh } x} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Partie 3

1. On a $k \geq n \geq 2$ donc $0 \leq \frac{1}{k} < 1$. En appliquant à $\frac{1}{k}$ la double inégalité obtenue lors de la question 4 de la partie 2, il vient
$$\frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \leq e^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{k}{k-1}.$$

2. On a
$$e^{S_n} = e^{\sum\limits_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} = \prod_{k=n}^{np} e^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)}.$$
Or, pour tout entier $k \in [\![n, np]\!]$, on a montré lors de la question précédente
$$\frac{k+1}{k} \leq e^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} \leq \frac{k}{k-1}.$$
Il s'ensuit
$$\prod_{k=n}^{np} \frac{k+1}{k} \leq e^{S_n} \leq \prod_{k=n}^{np} \frac{k}{k-1}.$$
Les produits ci-dessus sont des produits télescopiques qui se simplifient sous la forme
$$\prod_{k=n}^{np} \frac{k+1}{k} = \frac{np+1}{n} \leq e^{S_n} \leq \prod_{k=n}^{np} \frac{k}{k-1} = \frac{np}{n-1}.$$

3. En composant par la fonction ln qui est croissante, l'inégalité obtenue lors de la question précédente donne
$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq \ln\left(\frac{np}{n-1}\right).$$
Or, on a d'une part
$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(p + \frac{1}{n}\right) = \ln p$$
et d'autre part
$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np}{n-1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{p}{1-\frac{1}{n}}\right) = \ln p.$$
Grâce au théorème des gendarmes, on obtient ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln p.$$