Corrigé Devoir Surveillé 2

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation de la copie. Les réponses aux différentes questions seront séparées par un trait horizontal et les résultats seront encadrés. L'usage de la calculatrice ou de tout autre instrument de calcul (téléphone, ordinateur ...) est formellement interdit.

Exercice 0

1. On a :
$$\begin{aligned} -(7x+6)(5x+3)+49x^2-36 &= -(7x+6)(5x+3)+(7x-6)(7x+6) \\ &= (7x+6)(-(5x+3)+(7x-6)) \\ &= (7x+6)(2x-9) \end{aligned}$$

2. On a
$$\begin{aligned} \tfrac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\tfrac{(a+b)^2}{a-b} &= \tfrac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\tfrac{(a+b)^2(a-b)}{(a-b)^2} \\ &= \tfrac{a^3-b^3-a^3+a^2b+-2a^2b+2ab^2-b^2a+b^3}{(a-b)^2} \\ &= \tfrac{-a^2b+b^2a}{(a-b)^2} \\ &= \tfrac{ab(b-a)}{(a-b)^2} \\ &= -\tfrac{ab}{a-b} \end{aligned}$$

3. On a :
$$\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)n^2(n-1)^2}{n(n-1)(2n-2)(2n+2)} = \frac{3n}{2}$$
pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$.

4. Calculer $\sum\limits_{k=3}^{n+5}(k-3)^3 = 0+1^3+2^3+...+(n+2)^3 = \left(\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right)^2$.

5. Calculer $\sum\limits_{k=2}^{n-1}5^k = 25\frac{5^{n-2}-1}{5-1} = \frac{25}{4}(5^{n-2}-1)$.

Exercice 1

$$\begin{aligned} \sin(x)^7 &= \left(\tfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^7 \\ &= \tfrac{1}{-128i}\left(e^{7ix}-7e^{5ix}+21e^{3ix}-35e^{ix}+35e^{-ix}-21e^{-3ix}+7e^{-5ix}-e^{-7ix}\right) \\ &= -\tfrac{1}{64}\left(\tfrac{e^{7ix}-e^{-7ix}}{2i}-7\tfrac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}+21\tfrac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}-35\tfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \\ &= -\tfrac{1}{64}\left(\sin(7x)-7\sin(5x)+21\sin(3x)-35\sin(x)\right) \\ \cos(x)^7 &= \left(\tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^7 \\ &= \tfrac{1}{128}\left(e^{7ix}+7e^{5ix}+21e^{3ix}+35e^{ix}+35e^{-ix}+21e^{-3ix}+7e^{-5ix}+e^{-7ix}\right) \\ &= \tfrac{1}{64}\left(\tfrac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2}+7\tfrac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}+21\tfrac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+35\tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{64}\left(\cos(7x)+7\cos(5x)+21\cos(3x)+35\cos(x)\right) \end{aligned}$$

Exercice 2

1)

Intéressons nous à la fonction : x^2-4x+3, sa dérivée est $2x-4$ qui s'annule en 2.

La fonction est donc décroissante sur $]-\infty,2]$ et est donc bijective de $]-\infty,2]$ sur $[-1,+\infty[$

Soit $y \in [-1,+\infty[$. Résolvons $x^2-4x+3=y$.

On a $x^2-4x+3-y=0$. On calcule le discriminant :

$\Delta = 16-4(3-y) = 4+4y$ qui est positif vu que $y \in [-1,+\infty[$.

Et donc $x = \frac{4\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ mais comme la solution doit être dans $]-\infty, 2]$ la solution est $x = \frac{4-\sqrt{\Delta}}{2}$.
On a donc $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{1+y}$.
2)
Intéressons nous à la fonction : $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ sa dérivée est $f'(x) = \frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$ qui ne s'annule pas. La fonction f est donc croissante de $I =]-2, +\infty[$ vers $J =]-\infty, 2[$ (Calculer la limite en $+\infty$ c'est facile).
Soit $y \in J$. Résolvons $f(x) = y$. avec $x \in I$
$\frac{2x-1}{x+2} = y \Leftrightarrow 2x - 1 = y(x+2) \Leftrightarrow (2-y)x = 2y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{2-y}$
Donc $f^{-1}(y) == \frac{2y+1}{2-y}$.

Exercice 3

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0$
   Calculons $\Delta = (2(1+i))^2 - 4(-5(1+2i)) = 8i + 20 + 40i = 20 + 48i = (6+4i)^2$.
   On a donc deux solutions $\frac{-2(1+i)-(6+4i)}{2} = -4 - 3i$ et $\frac{-2(1+i)+(6+4i)}{2} = 2 + i$
2. $z^2 - (1+3i)z + 2i - 2 = 0$.
   Calculons $\Delta = (1+3i)^2 - 4(2i-2) = 1 + 6i - 9 - 8i + 8 = -2i = (1-i)^2$
   On a donc deux solutions $\frac{1+3i-(1-i)}{2} = 2i$ et $\frac{1+3i+(1-i)}{2} = 1 + i$.

Probleme : Calcul de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\sin(\frac{\pi}{5})$

Chaque partie propose une méthode différente pour calculer ces nombres.

Partie 1

1. On considère l'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+\frac{1}{z} \end{array}$. Soit $y \in \mathbb{C}$.

   (a) On a $z^2+1-yz=0$ qui admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$car c'est un polynôme de dégré 2.

   (b) Résolvons $\psi(z)=y \Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=y \Leftrightarrow z^2+1-yz=0$ qui admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$

   (c) Ainsi ψ est surjective. Comme un polynome de degré 1 ou 2 a deux racines. Peu de chance que ψ soit injective. En effet $\psi(i)=\psi(-i)=0$

   On considère les équations suivantes :

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0 \tag{1}$$

$$z^2+z-1=0 \tag{2}$$

2. On note S_2 les solutions de 1 et S_3 les solutions de 2.
   Soit $z_0 \in S_2$. Calculons
$$\begin{array}{rcl} \psi(z_0)^2+\psi(z_0)-1 & = & (z_0+\frac{1}{z_0})^2+z_0+\frac{1}{z_0}-1 \\ & = & z_0^2+2+\frac{1}{z_0^2}+z_0+\frac{1}{z_0}-1 \\ & = & \frac{1}{z_0^2}(z_0^4+z_0^3+z_0^2+z_0+1) \\ & = & 0 \end{array}$$
   Ainsi $\psi(z_0) \in S_3$

3. Soient r_1 et r_2, les deux solutions réelles de l'équation $X^2-X-1=0$.

4. Tout d'abord $z \neq 1$ car 1 n'est pas solution de 1. On a :
$$\begin{array}{rrcl} & z^4+z^3+z^2+z+1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1-z^5}{1-z} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 1-z^5 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & z^5 & = & 1 \end{array}$$
   Donc les solutions sont les racines 5emes de l'unité mis a part 1. On a donc $S_2=\{e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}\}$

5. On cherche à résoudre $z^2+z-1=0$.
   Calculons $\Delta=1^2+4=5$. Ainsi il y a deux solutions réelles et $S_3=\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$.

6. - Si $u=e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ou $u=e^{\frac{8i\pi}{5}}$ alors $u+u^{-1}=u+\overline{u}=2Re(u)=2\cos(2\pi/5)$
   - Si $u=e^{\frac{4i\pi}{5}}$ ou $u=e^{\frac{6i\pi}{5}}$ alors $u+u^{-1}=u+\overline{u}=2Re(u)=2\cos(6\pi/5)$

   Exprimer sous forme trigonométrique $u+u^{-1}$ selon les valeurs de $u \in S_2$.

7. Je sais que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est positif (faire le cercle) ainsi comme $e^{2i\pi/5} \in S_2$ alors $\psi(e^{2i\pi/5})=2\cos(2\pi/5) \in S_3$ et par conséquent $2\cos(2\pi/5)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ Ainsi $\cos(2\pi/5)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

8. J'utilise la formule $\cos(2\pi/5)=\cos^2(\pi/5)-\sin^2(\pi/5)=1-2\sin^2(\pi/5)$. Or comme $\sin(\pi/5)$ est positif $\sin(\pi/5)=\sqrt{\frac{1-\cos(2\pi/5)}{2}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

9. De même $\cos(\pi/5)=\sqrt{\frac{1+\cos(2\pi/5)}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

   Ainsi $\tan(\pi/5)=\frac{\sin(\pi/5)}{\cos(\pi/5)}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

Partie 2 (facultatif)

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0[2\pi]$. On a :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} \cos(a+kb) &= Re\left(\sum_{k=0}^{m-1} e^{i(a+kb)}\right) \\
&= Re\left(e^{ia}\frac{e^{ibm}-1}{e^{ib}-1}\right) \\
&= Re\left(e^{ia}\frac{e^{ibm/2}}{e^{ib/2}}\frac{e^{ibm/2}-e^{-ibm/2}}{e^{ib/2}-e^{-ib/2}}\right) \\
&= Re\left(e^{i(a+b(m-1)/2)}\frac{\sin(bm/2)}{\sin(b/2)}\right) \\
&= \frac{\sin(bm/2)}{\sin(b/2)} Re\left(e^{i(a+b(m-1)/2)}\right) \\
&= \frac{\sin(bm/2)}{\sin(b/2)}\cos(a+b\frac{m-1}{2})
\end{aligned}$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose :
$$a_k = (-1)^k \cos(\frac{k\pi}{2n+1}).$$
2. On a
   - $a_{k+2n+1} = (-1)^{k+2n+1}\cos(\frac{(k+2n+1)\pi}{2n+1}) = -(-1)^k\cos(\frac{k\pi}{2n+1}+\pi) = a_k$
   - $a_{2n+1-k} = (-1)^{2n+1-k}\cos(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}) = -(-1)^k\cos(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}) = a_k$
3. Soient $(s,k) \in \mathbb{Z}^2$, en remarquant que $(-1)^{s+k} = (-1)^{s-k}$:
$$\begin{aligned}
a_{s+k} + a_{s-k} &= (-1)^{s+k}\cos(\tfrac{(s+k)\pi}{2n+1}) + (-1)^{s-k}\cos(\tfrac{(s-k)\pi}{2n+1}) \\
&= (-1)^{s+k}\left(\cos(\tfrac{s\pi}{2n+1})\cos(\tfrac{k\pi}{2n+1}) - \sin(\tfrac{s\pi}{2n+1})\sin(\tfrac{k\pi}{2n+1}) + \cos(\tfrac{s\pi}{2n+1})\cos(\tfrac{k\pi}{2n+1}) + \sin(\tfrac{s\pi}{2n+1})\sin(\tfrac{k\pi}{2n+1})\right) \\
&= (-1)^{s+k}\left(2\cos(\tfrac{s\pi}{2n+1})\cos(\tfrac{k\pi}{2n+1})\right) \\
&= 2a_k a_s
\end{aligned}$$
4. Si $s = k$, on obtient $2a_k^2 = a_{2k} + a_0 = a_{2k} + 1$
5. On a comme $a_k = a_{2n+1-k}$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2n+1-k} = a_{2n} + a_{2n-1} + ... + a_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$
6. On a la violence :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} a_k &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\cos(\tfrac{k\pi}{2n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k Re(e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}) \\
&= Re\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k e^{i\frac{k\pi}{2n+1}}\right) \\
&= Re\left(\sum_{k=0}^{2n}\left(-1e^{i\frac{\pi}{2n+1}}\right)^k\right) \\
&= Re\left(\frac{1-(-1e^{i\frac{\pi}{2n+1}})^{2n+1}}{1+e^{i\frac{\pi}{2n+1}}}\right) \\
&= Re\left(\frac{1-(-1)^{2n+1}e^{i\pi}}{1+e^{i\frac{\pi}{2n+1}}}\right) \\
&= Re\left(\frac{0}{1+e^{i\frac{\pi}{2n+1}}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$
7. Pour une fois c'est facile
$$0 = \sum_{k=0}^{2n} a_k. = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k$$
qui se réécrit $\sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{2}$.

8. On applique la formule précédente avec $n = 2$:
   $a_1 + a_2 = -\cos(\pi/5) + \cos(2\pi/5) = -\frac{1}{2}$
   Or $\cos(2\pi/5) = 2\cos^2(\pi/5) - 1$ et ainsi $\cos(\pi/5)$ est la racine positive du polynôme $2X^2 - X - \frac{1}{2}$
   Or $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times \frac{-1}{2} = 5$ donc $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$
   On pourrait se dire WTF ou encore Bullshit car on a trouvé $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$ a la partie précédente...
   Mais $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8} = \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right)^2$ mais comme les nombres sont positifs, le fait que leurs carrés soient égaux implique bien que les nombres sont égaux !!!!