Chapitre 0 : Ensembles, logique, applications

1 Logique

1.1 Définition

Définition : Une assertion est un énoncé (mathématique ou non) dont on peut dire s'il est vrai ou faux.

Exemple :

1.2 Connecteurs logiques

Ce sont des liaisons qui permettent de créer de nouvelles assertions à partir des précédentes. Soient P et Q deux assertions.

- Le connecteur ET :

"P et Q" est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies. On résume cela avec la table de vérité suivante :

P	Q	P ET Q

Exemple :

- Le connecteur OU :

"P ou Q" est vraie dès que P est vraie ou Q est vraie (ou les 2). On résume cela avec la table de vérité suivante :

P	Q	P OU Q

Exemple :

- Le connecteur NON :

"Non P" est vraie si P est fausse. On résume cela avec la table de vérité suivante :

P	Non P

Exemple :

- Les connecteur implique et équivaut :

"$P \Rightarrow Q$" est vraie si P est fausse ou alors si P et Q sont vraies. On lit "P implique Q" ou encore "Si P alors Q".
"$P \Leftrightarrow Q$" est vraie si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On lit "P équivalent à Q" ou encore " P si et seulement si Q".
On résume cela avec la table de vérité suivante :

P	Q	P $\Rightarrow$ Q	Q$\Rightarrow$ P	P $\Leftrightarrow$ Q

Exemple :

Remarque fondamentale : Dans la majorité des exercices de prépa, pour montrer $P \Leftrightarrow Q$, on montrera $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$.
Méthode : Pour montrer que deux assertions sont équivalentes, on montre qu'elles ont les mêmes tables de vérité.

Propriétés : Soient P, Q et R trois assertions.

- non(non P) $\Leftrightarrow$ P
- P et Q $\Leftrightarrow$ Q et P
- P ou Q $\Leftrightarrow$ Q ou P
- non (P et Q) $\Leftrightarrow$ non(P) ou non(Q)
- non(P ou Q) $\Leftrightarrow$ non(P) et non(Q)
- P et (Q ou R) $\Leftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R)
- P ou (Q et R) $\Leftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)
- P ou (Q ou R) $\Leftrightarrow$ (P ou Q) ou R
- P et (Q et R) $\Leftrightarrow$ (P et Q) et R

Démonstration : Il s'agit juste de faire les tables de vérité, l'intérêt étant limité nous en prouverons que deux :

- non (P et Q) $\Leftrightarrow$ non(P) ou non(Q)

P	Q	non P	non Q	non P ou non Q	P et Q

- P ou (Q et R) $\Leftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)

P	Q	R	Q et R	P ou Q	P ou R	P ou (Q et R)	(P ou Q) et (P ou R)

On fera preuve d'une très grande prudence lorsque l'on utilisera le symbole $\Leftrightarrow$ pour résoudre des équations ou des inéquations.

Exemple :

- $x \geq 3$ $x \geq 2$
- $x \geq 3$ $x^2 \geq 9$
- $x \leq 3$ $x^2 \leq 9$
- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x^2 - 9)(x + 12) = 0$.

- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x) = \ln(x + 1) - \ln(2)$

Raisonner par équivalence conduit souvent à une erreur :

En pratique on choisira de raisonner par implication :

1.3 Démonstrations

Le but des Mathématiques est de déduire des propriétés et des théorèmes à partir de résultats que nous savons vrais. Sans entrer dans les détails, les résultats que nous savons vrais sont les axiomes (résultats admis et fondateurs d'une théorie) et les théorèmes déjà démontrés. Pour en démontrer d'autres nous utiliserons les techniques suivantes :

- Le modus ponens : Si P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie alors Q est vraie.

Exemple :
P : "pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair"
Q : "pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier"
Ici il est clair que $P \Rightarrow Q$ est vraie : si le numérateur est pair alors en divisant par 2, j'obtiens un nombre entier. On remarque aussi que $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs et donc un nombre pair. Par conséquent Q est bien vraie.

- La transitivité de l'implication : Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors $P \Rightarrow R$

Cela permet de démontrer des résultats en passant par des étapes intermédiaires.

- La disjonction de cas (ici 2 cas mais en pratique, autant que l'on veut) : ((P_1 ou P_2) et ($P_1 \Rightarrow Q$) et ($P_2 \Rightarrow Q$))$\Rightarrow Q$.

Il s'agit de démontrer que l'on est forcément dans le cas P_1 ou le cas P_2 puis de montrer que dans chacun des cas Q est vraie. Il en résultat que Q est vraie.
Exemple : Démontrer que si $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$.

- La contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow$(non $Q \Rightarrow$ non P)

Il s'agit d'une méthode permettant de démontrer une implication. Souvent "prendre les choses à l'envers" est plus facile.
Exemple : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$.

- Le raisonnement par l'absurde.

Il s'agit de supposer le contraire de l'assertion que l'on veut montrer et d'aboutir à la fois à une assertion C et à son contraire non C. Ce qui sera évidemment ABSURDE.

Exemple : Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice : Montrer qu'on ne peut pas diviser par 0. Cela revient à dire qu'il n'existe pas de nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \times 0 = 1$.

Proposition : Si on souhaite montrer $P \Rightarrow Q$ par l'absurde, il faut supposer P et non Q.

Démonstration :

2 Ensembles

2.1 Généralités

Un ensemble est une collection d'éléments à partir duquel on construit deux types d'assertions :

- $a \in E$ se lit "a appartient à E". Le contraire s'écrit $a \notin E$
- $A \subset E$ se lit "la partie A est incluse dans la partie E". Le contraire s'écrit $A \not\subseteq E$.

Exemples :

Méthode : Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procèdera en général par double inclusion. C'est à dire que l'on montre $A \subset B$ puis $B \subset A$.

Exemple : Soient $A = \{n - 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq -3\}$. Montrer que $A = B$.

Définition : Soit E un ensemble.

- Il existe un ensemble appelé ensemble vide et noté $\emptyset$. Il ne contient aucun élément et est inclus dans tout autre ensemble.
- On note $P(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E. C'est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

Exemples :

2.2 Prédicats

Définition : Un prédicat $A(x, y, ...)$ est une assertion qui dépend des variables $x, y, ...$ Ainsi si on remplace toutes les variables, on obtient une assertion.

Exemples :

2.3 Quantificateurs

Soit $A(x)$ un prédicat dépendant d'une variable $x \in E$. On va construire des assertions à partir de ce prédicat en utilisant ce que l'on appelle des quantificateurs.

- Le quantificateur universel $\forall$:

$\forall x \in E, A(x)$ se lit "pour tout x appartenant à E, $A(x)$ est vraie". Cela signifie que $A(x)$ est vrai quel que soit $x \in E$.

Exemple :

- Le quantificateur existentiel $\exists$:

$\exists x \in E : A(x)$ se lit "il existe x appartenant à E tel que $A(x)$ est vraie.

Exemple :

- Le quantificateur existentiel $\exists!$

$\exists! x \in E : A(x)$ se lit "il existe un unique x appartenant à E tel que $A(x)$ est vraie.

Exemple :

2.4 Négation des quantificateurs

Nous allons faire beaucoup de preuves par l'absurde et la contraposée. Il est donc INDISPENSABLE de savoir écrire proprement la négation d'assertions définies à l'aide de quantificateurs.

- Le contraire de "pour tout x, $A(x)$ est vraie" est "il existe x tel que $A(x)$ est fausse"

$$\text{non}(\forall x \in E, A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E : \text{non}(A(x))$$

- Le contraire de "il existe x tel que $A(x)$ est vraie" est " pour tout x, $A(x)$ est fausse"

$$\text{non}(\exists x \in E : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \text{non}(A(x))$$

Exemple : Si E est la classe de PTSI et $A(x)$ ="x est un garçon"

Le contraire de "tout le monde est un garçon dans la classe" est

Le contraire de "il existe une fille dans la classe" est

Exercice :

1. Ecrire avec des quantificateurs le contraire des assertions suivantes
   $\forall x \in E, A(x) \Rightarrow B(x)$

   $\forall x \in E, A(x) \Leftrightarrow B(x)$

2. Soit (u_n) une suite. Complétez le tableau suivant :

Assertion	**Ecriture mathématique**	**Négation**
(u_n) est croissante	$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$	$\exists n \in \mathbb{N} : u_{n+1} < u_n$
(u_n) est stristement croissante		
	$\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A$	
(u_n) est constante à partir d'un certain rang		
	$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$	

2.5 Sous ensemble défini par un prédicat

Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat dépendant d'une variable $x \in E$.

Définition : $\{x \in E \mid P(x)\}$ est l'ensemble des x de E qui vérifient $P(x)$ vrai.

Exemple :

2.6 Opérations sur les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble, A et $B \in P(E)$. On définit les ensembles suivants :

- $A \cap B$ est l'intersection de A et B :
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$
- $A \cup B$ est l'union de A et B :
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
- $A \setminus B$ est la différence de A et B :
$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$
- C_E^A est le complémentaire de A dans E :
$$C_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Illustration :

Propriétés :
Soit E un ensemble et $A, B, C \in P(E)$.

- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$
- $A \subset B \Leftrightarrow C_E^A \supset C_E^B$

Démonstration :
Nous ne prouvons que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice :
Prouver le cas $A \subset B \Leftrightarrow C_E^A \supset C_E^B$

2.7 Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles.

Définition : On appelle produit cartésien de A et B et on note $A \times B$, l'ensemble des couples (a, b) où a décrit A et b décrit B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Remarque :

- $\forall (a, b) \in A \times B$ et $(c, d) \in A \times B$, $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$.
- Lorsque $A = B$, on note A^2 au lieu de $A \times A$.

Exemple :

- Décrire $A \times B$ lorsque $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{e, \pi\}$:

- Décrire $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$:

Définition : Soient $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $A_1, ..., A_p$ des ensembles. On note $A_1 \times ... \times A_p$, l'ensemble des couples $(a_1, ..., a_p)$ où a_1 décrit A_1,..., a_p décrit A_p :

$$A_1 \times ... \times A_p = \{(a_1, ..., a_p) \mid \forall i \in [\![1, p]\!], a_i \in A_i\}.$$

Remarque :

- $\forall (a_1, ..., a_p) \in A_1 \times ... \times A_p$ et $(b_1, ..., b_p) \in A_1 \times ... \times A_p$, $(a_1, ..., a_p) = (b_1, ..., b_p) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], a_i = b_i$.
- Lorsque $A_1 = ... = A_p$, on note A^p au lieu de $\underbrace{A \times ... \times A}_{\text{p fois}}$.

Exercice : Décrire $\mathbb{Q} \times \{1, 2\} \times \{\pi, e\}$:

2.8 Familles

Définition : Soient E et I deux ensembles. Une famille d'éléments de E indexée par I est un ensemble d'éléments de E où à chaque élément correspond exactement un élément de I et vice versa.

Remarque : On note une telle famille $(x_i)_{i \in I}$ et à chaque $i \in I$ correspond l'élément $x_i \in E$.

Exemple : Une suite réelle (u_n) est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$. En effet à chaque $n \in \mathbb{N}$ correspond le réel u_n.

On peut considérer une famille de parties de E indexée par I (il s'agit tout simplement d'une famille d'éléments de $P(E)$ indexée par I). Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On note :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i_0 \in I : x \in A_{i_0}\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

Proposition : $C_E^{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I} C_E^{A_i}$.

Démonstration :

3 Applications, fonctions

3.1 Définition

Soient E et F deux ensembles. Une application de E vers F est une manière d'associer à chaque élément de E, un unique élément de F.

Si on note $u(x)$ l'unique $y \in F$ associé à x alors on peut désigner par u l'application de E vers F qui à x associe $u(x)$. On note cela :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \right.$$

Terminologie :

- E est l'ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de u.
- Pour $x \in E$, $u(x)$ est l'image de x par u.
- Pour $y \in F$, si $u(x) = y$ alors x est un antécédent de y par u.
- L'image de u est l'ensemble des images par u de tous les éléments de E :

$$\{u(x) \mid x \in E\}$$

Exemples :

- La fonction inverser : $E = \mathbb{R}^*$, $F = \mathbb{R}$.

- Pour tout ensemble E, id_E est l'application identité de E :

- Pour tout ensemble E et $A \subset E$, $1_A : E \to \{0,1\}$ est la fonction indicatrice de A :

- Pour tous ensembles E et F on peut définir les projections canoniques :

Notation : On note $F(E,F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Technique : Deux applications sont égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même graphe.

3.2 Restriction au départ et à l'arrivée

Définition : Soit $u \in F(E,F)$, A une partie de E et B une partie de F.

- La restriction au départ de u à A notée $u|_A$ est l'application :

$$u|_A : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

On ne s'intéresse plus qu'aux images des éléments de A par u.

- La restriction à l'arrivée de u à B notée $u|^B$ est l'application :

$$u|^B : \begin{array}{ccc} E & \to & B \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

- Si $\hat{E} \supset E$ alors un prolongement de u à $\hat{E}$ est une application $v : \hat{E} \to F$ telle que $v(x) = u(x)$ pour tout $x \in E$.

Remarque : On peut toujours restreindre au départ mais pour restreindre à l'arrivée il faut faire attention. En effet si on considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ alors $f|^{\mathbb{R}^*_-}$ n'a aucun sens. En effet, l'image par f de n'importe quel réel $x \in \mathbb{R}$ n'appartient pas à $\mathbb{R}^*_-$.

Exemples :

- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ alors $f|_{\mathbb{R}_+}$

- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ alors $f\,|^{\mathbb{R}^*}$

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ alors la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est

3.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition : Soit $u : E \to F$ une fonction. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Tout élément de F a au plus un antécédent par u.
- Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ admet au plus une solution dans E.
- Pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, $u(x_1) = u(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Si u vérifie une de ces conditions (toutes car elles sont équivalentes) alors u est dite injective.

Définition : Soit $u : E \to F$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Tout élément de F a au moins un antécédent par u.
- Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ admet au moins une solution dans E.
- $\forall y \in F, \exists x \in E : u(x) = y$.

Si elle vérifie une de ces conditions (toutes car elles sont équivalentes) u est dite surjective.

Définition : Soit $u : E \to F$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- u est injective et surjective.
- Pour tout$y \in F$, l'équation $u(x) = y$ admet exactement une solution dans E.
- $\forall y \in F, \exists! x \in E : u(x) = y$.

Si elle vérifie une de ces conditions (toutes car elles sont équivalentes) u est dite bijective.

Exemples :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

- $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$

3.4 Composition d'applications

Définition : Soient $u \in \mathcal{F}(E,F)$ et $v \in \mathcal{F}(F,G)$. Alors on peut définir :

$$v \circ u : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & v(u(x)) \end{array}$$

$v \circ u$ est appelée composée des applications v et u.

Schématiquement $\underset{x}{E} \underset{u}{\longrightarrow} \underset{u(x)}{F} \underset{v}{\longrightarrow} \underset{v(u(x))}{G}$

Remarque : On fera attention au fait que le schéma de composition présente les applications u et v dans l'ordre inverse de celui de la composition.

Proposition : Soient $u \in \mathcal{F}(E,F)$, $v \in F(F,G)$ et $w \in \mathcal{F}(G,H)$ alors :

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$$

Démonstration :

Proposition : Soient $u \in F(E,F)$ et $v \in F(F,G)$.

1. Si u et v sont injectives alors $v \circ u$ est injective.
2. Si u et v sont surjectives alors $v \circ u$ est surjective.
3. Si u et v sont bijectives alors $v \circ u$ est bijective.

Démonstration :

3.5 Applications réciproques

Définition : Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$ **bijective. L'application de** F **dans** E **qui à tout** y **associe l'unique solution dans** E **de l'équation** $u(x)=y$ **est appelée application réciproque de** u**. On la note** u^{-1}**.**

Exemples :

- La bijection réciproque de $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & t^2 \end{array}$ est
- La bijection réciproque de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ t & \mapsto & e^t \end{array}$ est

Proposition : Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$ bijective. On a $u^{-1} \circ u = id_E$ et $u \circ u^{-1} = id_F$.

Démonstration (exercice) :

Théorème : Soit $u : E \to F$. S'il existe $v : F \to E$ tel que $u \circ v = id_F$ et $v \circ u = id_E$ alors

$$u \text{ est bijective et } u^{-1} = v$$

Démonstration :

Définition : Soit $u : E \to E$, on dit que u est une involution si u est bijective et vérifie $u^{-1} = u$.

Exemples :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$
- $g : \begin{array}{ccc} P(E) & \to & P(E) \\ A & \mapsto & C_E^A \end{array}$
- $h : \begin{array}{ccc} PTSI & \to & PTSI \\ \text{élève } x & \mapsto & \begin{cases} \text{si élève x =} \\ \text{si élève x =} \\ x \quad \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

Proposition : Soient $u \in F(E,F)$ et $v \in F(F,G)$ bijectives. On a :

$$v \circ u \text{ est bijective et } (v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}.$$

Démonstration :

Méthode : Pour trouver une bijection réciproque d'une application u, il y a deux possibilités :

- On devine la bijection réciproque v et on calcule $v \circ u$ et $u \circ v$ pour trouver identité.
- On résout $u(x) = y$ et on obtient alors une expression explicite de u^{-1}.

Exercice : Montrer que $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{array}$ est une bijection et donner sa réciproque.

3.6 Image directe, image réciproque

Définition : Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$, A une partie de E et B une partie de F.

- L'image directe de A par u est l'ensemble :
$$u(A) = \{y \in F \mid \exists x_0 \in A : u(x_0) = y\} = \{u(x) \mid x \in A\}$$
- L'image réciproque de B par u est l'ensemble :
$$u^{-1}(B) = \{x \in E \mid u(x) \in B\}$$

Remarque : Attention la notation u^{-1} pour les images réciproques ne signifie en rien que u est une bijection. Il s'agit uniquement d'une notation.

Exemples :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

$f([1;2]) =$ $\quad$ $f^{-1}([0;8]) =$ $\quad$ $f(\{1\}) =$ $\quad$ $f^{-1}(\{-1\}) =$

- $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

$g([-2;2]) =$ $\quad$ $g^{-1}([0;4]) =$ $\quad$ $g^{-1}([-1;1]) =$ $\quad$ $g(\{1\}) =$ $\quad$ $g^{-1}(\{1\}) =$

Propriété : Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$, A et A' des parties de E, B et B' des parties de F. On a :

1. - Si $A \subset A'$ alors $u(A) \subset u(A')$
   - Si $B \subset B'$ alors $u^{-1}(B) \subset u^{-1}(B')$
2. - $u(A \cup A') = u(A) \cup u(A')$
   - $u^{-1}(B \cup B') = u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B')$
3. - $u(A \cap A') \subset u(A) \cap u(A')$
   - $u^{-1}(B \cap B') = u^{-1}(B) \cap u^{-1}(B')$
4. - $u^{-1}(C_F^B) = C_E^{u^{-1}(B)}$

Contre-exemple 3) : Si $u = \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $A = [-1;0]$ et $A' = [0;1]$

Démonstration :

4 Raisonnement par récurrence

4.1 Récurrence simple

Théorème de récurrence : Soit P_n une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si on a :

- P_0 vraie
- $\forall n \in N, P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration :

Exemple :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exemplarnaque :
On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$

4.2 Récurrence forte

Pour combler le manque de l'exemple précédent on raffine le théorème de récurrence :

Théorème de récurrence forte : Soit P_n une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si on a :

- P_0 est vraie
- $\forall n \in \mathbb{N}, (P_0, ..., P_n) \Rightarrow P_{n+1}$

Alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration :

Exercice :
Corriger la preuve précédente.