Chapitre 1 : Nombres complexes

1 L'ensemble des nombres complexes

1.1 Défintions

Hélas la construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas au programme. On admet donc l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des réels $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}$ possède une addition $+$ et une multiplication $\times$ avec lesquelles on calcule "comme dans $\mathbb{R}$",
- $\mathbb{C}$ possède un élément i vérifiant $i^2 = -1$,
- tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors x s'appelle la partie réelle de z et y la partie imaginaire de z. On note :

$$x = Re(z) \text{ et } y = Im(z).$$

Si $Im(z) = 0$, on dit que z est réel et si $Re(z) = 0$, on dit que z est imaginaire pur.

Conséquence immédiate : soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

- $Re(z + z') =$
- $Im(z + z') =$
- $Re(zz') =$
- $Im(zz') =$
- $z = z' \Leftrightarrow$

Pendant géométrique : On peut identifier $\mathbb{C}$ avec le plan de la manière suivante : si le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on associe au nombre complexe $z = x + iy$ le point M de coordonnées (x, y).

Exercice : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ecrire $\frac{1}{z} = x' + iy'$ avec $(x', y') \in \mathbb{R}^2$.

1.2 Conjugué et module

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$ le nombre $x - iy$.

Proposition : Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\qquad \overline{\overline{z}} = z$, $\qquad \overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$,
- si $z' \neq 0$, $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$,
- $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\qquad Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Démonstatration :

C'est évident. On ne prouve que $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Corollaire : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Démonstration :

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle module de z et on note $\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque : Avec la représentation géométrique des nombres complexes, $\mid z \mid$ est la distance du point d'affixe z avec l'origine du repère.

Proposition : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\mid z \mid^2 = z\bar{z}.$$

Démonstration :

Proposition : Soient $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a :

- $\mid zz' \mid = \mid z \mid\mid z' \mid$, $\quad \mid z + z' \mid \leq \mid z \mid + \mid z' \mid$,
- si $z' \neq 0$, $\mid \frac{z}{z'} \mid = \frac{|z|}{|z'|}$ $\quad \mid z - z' \mid \geq \mid\mid z \mid - \mid z' \mid\mid$
- $\mid z \mid = \mid \overline{z} \mid$, $\quad \mid z + z' \mid^2 = \mid z \mid^2 + \mid z' \mid^2 + 2Re(z\overline{z'})$

Démonstration :

Exercice : Soient $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ tels que $z \neq 0$. Montrer que :

$$\mid z + z' \mid = \mid z \mid + \mid z' \mid \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : z' = \lambda z$$

2 Nombres complexes de module 1 et exponentielle complexe

Définition : On appelle $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes dont le module vaut 1.

Exemple : le nombre $\in \mathbb{U}$.

Proposition : Soient $(z,z)' \in \mathbb{U}^2$.

1. $zz' \in U$
2. $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$

Démonstration :

Définition : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle exponentielle imaginaire d'angle θ et on note $e^{i\theta}$ le nombre :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Conséquence : $e^{i0} =$

Exemple : $e^{i\pi} =$

Proposition : Soit $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. De plus θ est unique à 2π près.

Démonstration : Il suffit de se rappeler le cosinus et le sinus comme au lycée et de faire un dessin :

Exemple : $i =$

Théorème : Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

1. $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$,
2. $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$,
3. $e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$.

Démonstration :

On en deduit alors les formules suivantes :

Formule d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.
Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ qui se réécrit moins trivialement $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Résultat : On déduit de ça les formules de linéarisation suivantes, soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$:

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos(\frac{\theta-\theta'}{2})e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \qquad e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2i\sin(\frac{\theta-\theta'}{2})e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}.$$

Démonstration :

3 Exponentielle et argument d'un nombre complexe

3.1 Forme trigonométrique

Proposition : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. On appelle ça la forme trigonométrique de z.

Démonstration :

Exemple : $1 + i =$

Définition : Le nombre ρ est unique, il s'agit du module de z et θ s'appelle un argument de z. On note $\theta = Arg(z)$. Il est unique à 2π près. Cela signifie que si θ et θ' sont deux agruments du même nombre z, ils diffèrent d'un certain nombre de fois 2π. On note $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

Interprétation géométrique :

Proposition : Soient z et $z' \in \mathbb{C}^*$. On a :

- $Arg(zz') \equiv Arg(z) + Arg(z')[2\pi]$
- $Arg(\frac{z}{z'}) \equiv Arg(z) - Arg(z')[2\pi]$
- $Arg(\overline{z}) \equiv -Arg(z)[2\pi]$
- $Arg(z^n) \equiv nArg(z)[2\pi]$

Démonstration :

3.2 Exponentielle complexe

Définition : Si $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors on définit :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

4 Racines $n^{ièmes}$ de l'unité et résolution d'équations algébriques

4.1 Racines de l'unité

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n^{ième}$ de l'unité tout nombre complexe solution de l'équation $z^n = 1$. L'ensemble des racines $n^{ièmes}$ de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Exemple : les racines $2^{ièmes}$ (ou racines carrées) de l'unité sont $\mathbb{U}_2 =$

Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0; n-1]\!]\}.$$

Démonstaration :

Corollaire : Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$ avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors l'équation $X^n - z = 0$ a n solutions qui sont :

$$\{\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0; n-1]\!]\}$$

4.2 Résolution d'équations d'ordre 2.

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que $a \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de z si $a^2 = z$.

Exemple :

1. $\sqrt{2}$ est une racine carrée de .
2. i est une racine carrée de . Une autre racine carrée de ce nombre est .

Remarque : On ne parle pas de la racine carrée d'un nombre complexe car il y a en général deux racines carrées pour un même nombre et on ne sait pas privilégier l'une par rapport à l'autre. Cela nous interdit évidemment d'utiliser le symbole $\sqrt{}$.

Proposition : Tout nombre $z \in \mathbb{C}^*$ admet exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}^*$.

Démonstration :

Exercice : Quelles sont les deux racines carrées de $1+i$?

Théorème : On considère l'équation $az^2+bz+c=0$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ et $a\neq 0$. On définit alors $\Delta=b^2-4ac$.

- si $\Delta=0$ l'équation a une solution double $z_0=\frac{-b}{2a}$,
- si $\Delta\neq 0$, alors on note δ une racine carrée de Δ. L'équation a deux solutions $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$.

Démonstration :

Exemple : Les solutions de l'équation $z^2-(5i+14)z+2(5i+12)$ sont :

Remarque : Dans le théorème, si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\Delta<0$ les deux racines sont complexes conjuguées.

Proposition : On considère l'équation $az^2+bz+c=0$ avec $a\in\mathbb{C}^*$ et $(b,c)\in\mathbb{C}^2$. On appelle z_1 et z_2 les solutions complexes de cette équation. On a :

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2).$$

Démonstration :

Corollaire : On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{C}^2$. On appelle z_1 et z_2 les solutions complexes de cette équation. On a

$$-a(z_1 + z_2) = b \text{ et } az_1 z_2 = c$$

Démonstration :

Théorème : Toute fonction polynômiale $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ non constante est surjective.

5 Nombres complexes et géométrie plane

On se place toujours dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

5.1 Généralités

Définition : Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(a; b)$. L'affixe de $\overrightarrow{u}$ est le nombre complexe $a + ib$.

Exemple : $1 + i$ est l'affixe du vecteur

Proposition : Soient A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives a et b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

Démonstration :

Proposition : Soient $(z, z') \in \mathbb{C}$. La distance entre le point d'affixe z et le point d'affixe z' est $\mid z - z' \mid$.

Démonstration :

Proposition : Soit A un point du plan d'affixe a et $r > 0$. Les points du cercle de centre A et de rayon r ont pour affixe :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mid z - a \mid = r\}.$$

Démonstration :

5.2 Alignement et orthogonalité

Proposition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives z et z'. Toute mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un argument du nombre complexe $\frac{z'}{z}$.

Démonstration :

Corollaire : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives z et z'.

1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}$,
2. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z}{z'}$ est imaginaire pur.

Démonstration :

Corollaire : Soient A,B et C trois points distincts du plan et d'affixes a, b et c.

1. A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$
2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{b-a}{c-a}$ est imaginaire pur.

5.3 Transformations du plan

Proposition : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe a. Alors la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est représentée par l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+a \end{array}.$$

Démonstration :

Définition : Soit A un point du plan et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'homothétie de centre A et de rapport λ est la transformation qui a un point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}.$$

Représentation géométrique :

Proposition : Soit A un point du plan d'affixe a et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'homothétie de centre A et de rapport λ est représentée par l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a+\lambda(z-a) \end{array}.$$

Démonstration :

Définition : Soit A un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre A et d'angle θ associe à tout point M le point M' vérifiant :

$$AM = AM' \text{ et } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \theta[2\pi]$$

Proposition : Soit A un point du plan d'affixe a et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre A et d'angle θ est représentée par l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a+e^{i\theta}(z-a) \end{array}.$$

Démonstration :

Exemple : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{\frac{2i\pi}{5}}z \end{array}$ est la rotation de centre et d'angle . On vérifie aisément qu'elle préserve $\mathbb{U}_5$.

Proposition : La symétrie par rapport à l'axe des réels est représenté par l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$.

Démonstration :

Définition : Une similitude directe du plan complexe est une application représentée par une transformation de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az+b \end{array}$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Remarque : toutes les transformations précédentes (à l'exception de la symétrie) sont des similitudes directes.

Proposition : Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et s la similitude représentée par $z \mapsto az + b$.

- Si $a = 1$ alors s est la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$ alors s admet un point fixe Ω que l'on appelle centre de la similitude. De plus si θ est un argument de a, alors s est la composée de la rotation R de centre Ω et d'angle θ et de l'homothétie H de centre Ω et de rapport $\mid a \mid$. On a $s = H \circ R = R \circ H$.

Démonstration :

Exemple : Sur $\mathbb{C}$, on considère la transformation s définie par $s(z) = (1+i)z + 2i$