Chapitre 4 : Equations différentielles

Comme d'habitude I désigne un intervalle.

Nous avons déjà vu plusieurs équations fonctionnelles en exercice. Nous essayions alors de trouver toutes les fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle. Une équation différentielle, c'est une équation fonctionnelle faisant intervenir une fonction ainsi que ses dérivées mais aussi d'autres fonctions paramètres.

L'équation :

$$\forall x \in I, y^{(n)}(x) = a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y(x) + a_0(x)$$

est une équation différentielle linéaire (on ne voit pas de y^2 où e^y ...) d'inconnue la fonction y et d'ordre n (la plus grosses dérivée de y est n), $a_{n-1}, ..., a_0$ sont des fonctions paramètres (parfois constantes et parfois non).

1 Equations différentielles du premier ordre

On va s'intéresser aux équations de la forme :

$$\forall x \in I, y^{'}(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{1}$$

Eventuellement on peut rencontrer des équations du type :

$$\forall x \in I, c(x)y^{'}(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

Auquel cas on se place sur un intervalle I' où c ne s'annule pas et on résout :

$$\forall x \in I', y^{'}(x) + \frac{a(x)}{c(x)}y(x) = \frac{b(x)}{c(x)}$$

1.1 Structure de l'ensemble des solutions

Définition : On appelle solution de l'équation 1 toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que :

$$\forall x \in I, f^{'}(x) + a(x)f(x) = b(x).$$

- La fonction b est appellée second membre de l'équation.
- L'équation :

$$\forall x \in I, y^{'}(x) + a(x)y(x) = 0 \tag{2}$$

est l'équation homogène (sans second membre) associée à l'équation 1.

Proposition (strucutre d'espace vectoriel) : Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si f et g sont deux solutions de l'équation homogène 2 alors $\lambda f + \mu g$ est aussi solution de l'équation homogène 2.

Démonstration :

Exemple : Si on considère l'équation $y'' + y = 0$.

Proposition : Soit f une solution de l'équation 1. On note S_H l'ensemble de toutes les solutions de 2. Alors l'ensemble de toutes les solutions de 1 est :

$$S = \{f + g \mid g \in S_H\}.$$

Démonstration :

Remarque : Ainsi pour trouver toutes les solutions de 1, il suffit d'en trouver une en particulier (peu importe laquelle et peu importe le moyen) puis de trouver toutes les solutions de l'équations homogène 2, ce que nous allons apprendre à faire.

Exemple : $y' - y = x$

1.2 Résolution des équations homogènes

Proposition : On considère l'équation homogène 2. Soit A une primitive de a sur I. L'ensemble des solutions de l'équation homogène 2 est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Démonstration :

Exemple : Résoudre $y' - \frac{2}{x}y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

1.3 Trouver une solution particulière.

Il se peut qu'un exercice nous suggère la forme d'une solution particulière, dans ce cas cela reviendra souvent à résoudre une équation.

Exemple : Trouver une solution particulière de l'équation $y' + y = x^2$. On cherchera la solution sous la forme d'un polynôme de degré 2.

Principe de superposition : On considère l'équation 1 dans le cas où le second membre $b = b_1 + b_2$. Si f_1 est une solution particulière de $y'(x) + a(x)y = b_1(x)$ et f_2 est une solution particulière de $y'(x) + a(x)y = b_2(x)$ alors $f_1 + f_2$ est une solution particulière de 1

Démonstration :

Exemple : En passant par les complexes, trouver une solution particulière de $y'(x) + y(x) = \cos(x)$.

Dans le cas où on arrive pas à découper le second membre, ou si on y arrive mais on ne trouve pas de solutions particulières à superposer, on a une méthode qui marche à tous les coups et dont le nom est assez grossier :

Méthode de variation de la constante :

On a déterminé les solutions de l'équation homogène S=$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. On cherche alors une solution particulière f vérifiant :
$f(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$ où λ devient une fonction dérivable.
Lorsqu'on injecte dans l'équation 1 :

$$\begin{array}{lll} & \lambda'(x)e^{-A(x)} + \lambda(x)(-a(x))e^{-A(x)} + \lambda(x)a(x)e^{-A(x)} & = & b(x) \\ \Leftrightarrow & \lambda'(x)e^{-A(x)} & = & b(x) \\ \Leftrightarrow & \lambda'(x) & = & b(x)e^{A(x)} \\ \Leftarrow & \lambda(x) & = & \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt \quad \text{où } t_0 \in I \end{array}$$

La fonction f définie par $f(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt e^{-A(x)}$ est alors solution particulière de l'équation avec second membre 1.

Remarque : Dans le cas présent, il ne faut pas apprendre par coeur la formule donnant $\lambda(x)$ mais juste la méthode : remplacer λ la constante par λ la fonction et réinjecter. Les calculs se simplifieront tout seuls en fonction des équations.

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + x^2 y = x^2$.

Récapitulatif :

Pour résoudre l'équation avec second membre 1 on procède par étapes :

1. On résout l'équation homogène 2. Il y a ici un calcul de primitive.
2. On cherche une solution particulière évidente, ou on utilise la variation de la constante (car on connait l'ensemble des solutions de l'équation homogène) pour en trouver une. Il y a ici encore un calcul de primitive.
3. On conclut en formant l'ensemble des solutions.

1.4 Problème de Cauchy et applications en SI

Nous avons vu qu'une équation différentielle a une infinité de solutions, sous certaines contraintes, il existe une unique solution à notre équation différentielle.

Théorème (problème de Cauchy) : Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution f à l'équation différentielle 1 vérifiant $f(x_0) = y_0$ (on appelle ça une condition initiale).

Démonstration :

Une équation différentielle que l'on rencontre souvent en physique/SI est la suivante :

$$y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A(t)}{\tau} \tag{3}$$

où τ s'appelle temps caractéristique d'évolution du phénomène et A est appelée consigne (c'est en général une constante ou une sinusoïde), lorsque $A = 0$ on parle de régime libre et lorsque $A \neq 0$ de régime forcé.

Exemples :

- Echange thermique, si T est la température d'un système au contact d'un dispositif dont la température est constante égale à T_0.

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0) \text{ avec } K < 0.$$

- Dans un circuit RC, la charge q contenue dans le condensateur évolue selon l'équation :

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U.$$

- La chute libre d'un corps, le frottement de l'air est une force f proportionnelle à la vitesse $f = \alpha v$:

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha v - g.$$

- Une réaction chimique où un produit A se transforme en produit B, on note C_A la concentration en produit A.

$$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A.$$

Exercice : Résoudre l'équation 3

Lorsque A est constante :

Lorsque $A = A_0 \cos(\omega t)$:

2 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On considère ici des équations de la forme

$$y'' + ay' + by = c(x) \tag{4}$$

a et b étant des réels (ou complexes) et c étant une fonction continue d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. C'est avec ce type d'équations qu'apparaissent les oscillateurs harmoniques ou amortis, les paraboles lors du lancé d'un projectile, etc ...

2.1 Structure de l'ensemble des solutions

Comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, on a les résultats suivants :

Définition :

- On dit que f est solution de l'équation 4 si :

$$f'' + af' + bf = c(x)$$

- c s'appelle le second membre de l'équation
- l'équation :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{5}$$

est l'équation homogène associée à l'équation avec second membre 4.

Exemple :

$y'' + y = x$

Proposition (structure d'espace vectoriel) : On note S_H l'ensemble des solutions de l'équation homogène 5. Si $(f, g) \in S_H^2$ et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha f + \beta g \in S_H$.

Démonstration :

Proposition : Si f est une solution de l'équation avec second membre 4 et si S_H désigne l'ensemble des solutions de l'équation homogene 5 alors l'ensemble des solutions de l'équation 4 est :

$$S = \{f + g \mid g \in S_H\}.$$

Démonstration :

Remarque : Ainsi pour trouver toutes les solutions de 4, il suffit d'en trouver une en particulier (peu importe laquelle et peu importe le moyen) puis de trouver toutes les solutions de l'équations homogène 5, ce que nous allons apprendre à faire.

Exemple : $y'' + y = x$

2.2 Résolution de l'équation homogène

Définition : On appelle équation caractéristique de l'équation homogène 5 l'équation :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

2.2.1 Cas complexe

Si a et b sont des nombres complexes.

Proposition : Soit $r \in \mathbb{C}$.
Le complexe r est solution de l'équation caractéristique de 5 si et seulement si $x \mapsto e^{rx}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de 5

Démonstration :

Exemple : $y'' + y = 0$

Théorème :

- Si l'équation caractéristique a deux racines r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation homogène est :

$$S = \{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}.$$

- Si l'équation caractéristique a une racine double r_0 dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation homogène est :

$$S = \{x \mapsto e^{r_0 x}(\lambda_1 + \lambda_2 x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Démonstration :

2.2.2 Cas réel

Si a et b sont des nombres réels.

Théorème :

- Si l'équation caractéristique a deux racines r_1 et r_2 dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation homogène est :

$$S = \{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Si l'équation caractéristique a deux racines complexes $\alpha \pm i\beta$ dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation homogène est :

$$S = \{x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Si l'équation caractéristique a une racine double r_0 dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation homogène est :

$$S = \{x \mapsto e^{r_0 x}(\lambda_1 + \lambda_2 x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Démonstration :

Exemple : Résoudre l'équation $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2.3 Trouver une solution particulière

Comme pour le premier degré, on peut nous suggérer la forme d'une solution particulière.

Exemple : trouver une solution particulière de la forme Ce^{-x} de $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$.

Comme pour le premier degré, on a le principe de superposition

Proposition : si f est solution de $y'' + ay' + by = c_1(x)$ et g est solution de $y'' + ay' + by = c_2(x)$ alors $(f + g)$ est solution $y'' + ay' + by = c_1(x) + c_2(x)$.

Démonstration :

Exemple : Trouver une solution particulière à l'équation $y'' + y = \sin^3(x)$.

2.4 Problème de cauchy et applications en SI

Théorème : L'équation $y'' + ay' + by = c(x)$ admet des solutions.

Démonstration : admis

Théorème (problème de Cauchy) : Soient $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Alors l'équation différentielle avec second membre 4 admet une une unique solution f vérifiant $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Démonstration :

L'équation que l'on rencontre le plus en physique/SI est la suivante :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = f(t)$$

Le coefficient λ représente l'amortissement (energie qui se dissipe via frottement ...), ω_0 est la pulsation propre et f représente l'action de l'extérieur sur le système, si $f = 0$ on est en régime libre, sinon en régime forcé.

Exemple :

Les oscilations du pendule libre sont : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ lorsque θ est petit.

Etudions précisemment les solutions de l'équation $y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$ en régime libre :

- Si $\lambda < \omega_0$ le régime est dit pseudo-périodique :

- Si $\lambda = \omega_0$, le régime est dit critique :

- Si $\lambda > \omega_0$ le régime est dit apériodique :