Chapitre 9 : $\mathbb{C}$alcul Matriciel

Ce chapitre prolonge l'étude des matrices que nous avons vues comme outil pour résoudre des sytèmes linéaires. Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n et p sont deux entiers naturels non nuls.

1 Définitions

Rappels : Nous avons déjà vu qu'une matrice $n \times p$ est un tableau à n lignes et p colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & ... & m_{1,p} \\ ... & ... & ... \\ m_{n,1} & ... & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

- Le coefficient à la ligne i et à la colonne j est $m_{i,j}$, on respectera toujours cet ordre : d'abord la ligne et ensuite la colonne.
- On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $n = p$ on dit que la matrice est carrée. Si un matrice carrée a tous ses coefficients au dessous (resp. au dessus) de la diagonale nuls, elle est triangulaire supérieure (resp. inférieure).
- La matrice nulle de taille $n \times p$ est la matrice $n \times p$ qui ne contient que des 0. Deux matrices sont égales si tous leurs coefficients terme à terme sont égaux.

Exemple :

- Si $p = 1$, on parle de matrice colonne :

$$C = \begin{pmatrix} m_1 \\ ... \\ m_n \end{pmatrix}$$

- Si $n = 1$, on parle de matrice ligne :

$$L = \begin{pmatrix} m_1 & ... & m_p \end{pmatrix}$$

- La $j$ème colonne de M est :

$$C_j = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ ... \\ m_{n,j} \end{pmatrix}$$

- La $i$ème ligne de M est :

$$L_i = \begin{pmatrix} m_{i,1} & ... & m_{i,p} \end{pmatrix}$$

- Les cofficients $m_{i,i}$ sont les coefficients diagonaux de la matrice.
- Une matrice carée est diagonale si seuls ses coefficients diagonaux sont non nuls

- Une matrice carrée est scalaire si elle est diagonale et que tous ses coefficients diagonaux sont égaux.

Définition : Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ alors la matrice transposée de M notée ${}^tM$ est la matrice de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de M en échangeant les lignes et les colonnes. Formellement :

$${}^tM_{i,j} = M_{j,i}, \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!].$$

Exemple :

Remarque : L'application $M \mapsto^t M$ est appelée transposition.

Exercice : Pour tout matrice M que vaut ${}^t({}^tM)$? Que dire de la transposée d'une matrice triangulaire supérieure ? inférieure ?

Définition : Soit M une matrice carée.

1. Si ${}^tM = M$, on dit que M est symétrique.
2. Si ${}^tM = -M$ on dit que M est antisymétrique.

Exemple :

Définition : Soit M une matrice carée.

On appelle trace de M et on note $Tr(M)$ la somme des coefficients diagonaux. $Tr(M) = \sum_{k=1}^{n} M_{k,k}$.

Exemple :

2 Sommes de matrices

2.1 Somme et multiplication par un scalaire

Définition : Soit $(A, B) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

1. On note $A + B$ la matrice telle que $(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.
2. On note αA la matrice telle que $(\alpha A)_{i,j} = \alpha A_{i,j}$, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

Remarque : L'addition de matrices n'est possible qu'entre deux matrices de même taille !

Exemple :

Soient $(A, B, C) \in M_{n,p}(\mathbb{K})^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. L'addition et la multiplication de matrices vérifient les propriété suivantes (en d'autres mots, elles se comportent "bien") :

- $A + (B + C) = (A + B) + C$, on dit que l'addition est associative, on a pas besoin des parenthèses.
- $A + B = B + A$, on dit que l'addition est commutative, l'ordre ne compte pas.
- Si 0 désigne la matrice nulle de taille $n \times p$, $A + 0 = 0 + A = A$, on dit que 0 est élément neutre.
- $A - A = 0$, toute matrice a une matrice opposée.
- $1A = A$, multiplier par 1 ne change rien.
- $\alpha(\beta A) = \alpha\beta A$, c'est un genre d'associativité.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ et $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

2.2 Combinaison linéaires

Définition : Soient $(A, B) \in M_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. En composant les deux opérations apprises précedemment, on définit $\alpha A + \beta B$ comme étant la matrice telle que :

$$(\alpha A + \beta B)_{i,j} = \alpha A_{i,j} + \beta B_{i,j}, \forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!].$$

Exemple : Toute matrice est combinaison des matrices élémentaires $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & 1 & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ où le 1 est en position i, j.

Proposition : La transposition est une application linéaire, c'est à dire que $\forall M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^t(\alpha M + \beta M') = \alpha^t M + \beta^t M'$.

Démonstration :

Remarque/exercice : citer 3 autres applications linéaires que vous avez pu voir dans votre vie.

3 Produit et inverse

3.1 Définition du produit

Attention : le produit de matrice n'est possible que sous une certaine condition : le nombre de colonnes de la matrice de gauche doit être égal au nombre de lignes de la matrice de droite.

Définition : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors la matrice $A \times B$ est la matrice définie par :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}, \forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!].$$

Exemples et méthode de calcul :

Attention : Il y a une multitude de cas pour lesquels le produit de matrice est impossible, de plus **le produit matriciel ne commute pas !**

Remarque : on remarque que le coefficient i, j de AB est le produit de la ligne i de A et de la colonne j de B.

Remarque : Le produit avec la matrice identité :

Lien avec les systèmes :

Si on pose $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,p} \\ ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,p} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}$ alors le produit $AX = B$ se rééecrit :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

3.2 Propriétés du produit

Proposition :

- Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A, B) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$M(\alpha A + \beta B) = \alpha MA + \beta MB.$$

- Soit $M \in M_{q,n}(\mathbb{K})$, $(A, B) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$(\alpha A + \beta B)M = \alpha AM + \beta BM.$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{q,n}(\mathbb{K})$. On a :

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

Démonstration :

Proposition : (Le produit est associatif) : Soient $(A, B, C) \in M_{p,q}(\mathbb{K}) \times M_{q,r}(\mathbb{K}) \times M_{r,n}(\mathbb{K})$. On a :

$$(AB)C = A(BC).$$

On écrira donc ABC sans se soucier des parenthèses.

Démonstration :

Proposition : Soient $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{q,n}(\mathbb{K})$. Ona :

$$^t(AB) =^t B^t A.$$

Démonstration :

Proposition : Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ alors :
$MX = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k C_k$ où C_k désigne la colonne k de M.

Démonstration :

Exercice : Enoncer un résultats similaire avec les lignes de M.

Corollaire : Soit $(A, B) \in (M_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. Si $\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, $AX = BX$ alors $A = B$.
En particulier si $AX = 0$, $\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ alors $A = 0$.

Démonstration :

Remarque : Ce n'était pas gagné d'avance car ce n'est pas parce qu'un produit est nul qu'un des deux facteurs est nul :

Proposition : Soient $(\alpha_1 ..., \alpha_n, \beta_1, ; .., \beta_n) \in \mathbb{K}^{2n}$. On a :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}.$$

Démonstration :

3.3 Matrices carrées

On a déjà vu que + et × étaient associatives, que + était commutative mais pas nécessairement × et que × se distribuait sur + "comme dans $\mathbb{R}$".

Remarque : les matrices de taille 1 sont identifiées aux éléments de $\mathbb{K}$.

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n \text{ fois}}$.

Exemple :

Règle de calcul : On a évidemment, pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $A^{a+b} = A^a \times A^b$ et il n'y a évidemment pas de puissances généralisées.

Exercice : Soient A, B, C trois matrices carrées de taille n avec $A \neq 0$. A-t-on $AB = AC \Rightarrow B = C$?

Proposition : Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. De plus les coefficients diagonaux du produit sont égaux au produit terme à terme des coefficients diagonaux de chaque matrice.

Démonstration :

Remarque : On peut énoncer la même proposition pour les matrices triangulaires inférieures.

Théorème (Binôme de Newton) : Soient A et B deux matrices **qui commutent** alors :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Démonstration :

Remarque : Attention il est obligatoire que A et B commutent, sinon la formule du binôme n'est pas valide.

3.4 Matrices inversibles : le groupe $GL_n(\mathbb{K})$

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, on dit que A est inversible et que B est l'inverse de A. On note $GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les matrices inversibles.

Exercice : Montrer que l'inverse d'une matrice est unique.

Exemple :

Remarque : A^{-1} est inversible et son inverse est A. Cela signifie que l'application de $Gl_n(\mathbb{K})$ dans $GL_n(\mathbb{K})$ qui a une matrice associe son inverse est une involution.

Proposition : Soient A et B deux matrices de taille n inversibles. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration :

Définition : On étend alors A^n pour $n \in \mathbb{Z}$ par $A^n = (A^{-1})^{-n}$ si n est négatif. Les règles de calcul des puissances s'étendent aussi.

Proposition : Soit A une matrice de taille n inversible. Alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1})$.

Démonstration :

4 Opérations élémentaires

4.1 Liens avec le produit de matrices

Dans cette section , nous allons voir que les opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice correspondent à des multiplications par certaines matrices bien choisies.

Pour rappel, les opérations élémentaires sont :

1. Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul.
2. Echange de deux lignes.
3. La plus utile : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

Exemple : Que devient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ si on lui applique les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$.

Définition :

- On appelle matrice de transvection une matrice de la forme :

$$E=\begin{pmatrix}1&0&...&0&0\\0&1&0&\lambda&0\\0&...&1&0&...\\...&...&0&1&0\\0&...&0&0&1\end{pmatrix}$$

Avec des 1 sur la diagonale, un λ en position i,j (avec $i\neq j$) et des 0 partout ailleurs. $E=I_n+\lambda E_{i,j}$

- On appelle matrice de dilatation une matrice de la forme :

$$E=\begin{pmatrix}1&0&...&0&0\\0&1&0&...&0\\0&...&\lambda&0&...\\...&...&0&1&0\\0&...&0&0&1\end{pmatrix}$$

matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale sauf pour un coefficient égal à $\lambda\neq 0$. En d'autres termes $E=I_n+(\lambda-1)E_{i,i}$.

- On appelle matrice de transposition une matrice de la forme :

$$E=\begin{pmatrix}1&0&...&0&0\\0&0&-&1&0\\0&|&1&|&...\\...&1&-&0&0\\0&...&0&0&1\end{pmatrix}$$

qui est obtenue a partir de la matrice identité en mettant des 0 en position i,i et j,j puis des 1 en position i,j et j,i. En d'autres termes $E=I_n-E_{i,i}-E_{j,j}+E_{i,j}+E_{j,i}$.

Une matrice élémentaire est une matrice d'un de ces trois types.

Proposition : Toute matrice élémentaire est inversible.

Démonstration :

Proposition : Toute opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) correspond à une multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice élémentaire.

Démonstration :

Exemple :

Conséquence : Si M et M' sont deux matrices équivalentes par lignes par une suite d'opérations élémentaires correspondant aux matrices $E_1, ...E_r$, alors $M' = E_r...E_1M$.

Démonstration :

Corollaire : Si M et M' sont équivalentes par lignes il existe P inversible tel que $M' = PM$.

Démonstration :

4.2 Inverse et systèmes linéaires

Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est équivalente par lignes à I_n.
2. La matrice A est inversible.
3. Pour tout $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système d'équations $AX = Y$ admet une unique solution.
4. Pour tout $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système d'équations $AX = Y$ admet au plus une solution.
5. Le système d'équations $AX = 0$ a pour seule solution $X = 0$.

Démonstration :

Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible.
2. Il existe $A' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AA' = I_n$.
3. Il existe $A' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A'A = I_n$.

Dans ces cas là $A' = A^{-1}$.

Démonstration :

Remarque : On y gagne énormément car avant il fallait trouver A' telle que $AA' = I_n$ et il fallait en plus vérifier $A'A = I_n$. Maintenant un seul des deux suffit.

Attention : Il faut que les matrices soient carrées. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (car pas carrée) en revanche on peut trouver A' tel que $A'A = I_2$.

Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $AX = Y$ qui admet au moins une solution dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration :

Théorème : Soient A et A' deux matrices carrées. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. A' et A sont inverses l'une de l'autre.
2. $\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{K}))^2$, $AX = Y \Leftrightarrow X = A'Y$.
3. $\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{K}))^2$, $AX = Y \Rightarrow X = A'Y$.
4. $\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{K}))^2$, $AX = Y \Leftarrow X = A'Y$.

Démonstration :

Ainsi on dispose d'une méthode pour inverser les matrices sans la calculatrice.

Exemple :

Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$

Proposition : Une matrice tirangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Son inverse est encore une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Démonstration :

Méthode pour inverser une matrice sans écrire le système associé :

Comme pour les systèmes que l'on peut résoudre avec des matrices augmentées, on peut inverser une matrice à l'aide des matrices augmentées. En effet, si A est inversible, on peut transformer A en la matrice identité via des opérations élémentaires sur les lignes.

On a vu que cela se traduisait par une multiplication à gauche : $E_1 \times ... \times E_r A = I_n$ avec $E_1, ..., E_r$ les matrices élémentaires associées aux transformations élémentaires faites. Mais alors $A^{-1} = E_1 \times ... \times E_r = E_1 \times ... \times E_r \times I_n$.

La méthode est donc d'appliquer les mêmes opérations élémentaires à A et à la matrice identité, ainsi lorsque A est entièrement transformée en I_n, la matrice identité est transformée en A^{-1}.

Exemple précédent :

4.3 Opérations sur les colonnes

On définit de même que pour les lignes la notion d'opération élémentaires sur les colonnes :

- $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$
- $C_i \leftrightarrow C_j$
- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$

L'inverse de ses opérations sont aussi des opérations élémentaires sur les colonnes, en effet :

On peut alors définir la notion de matrices équivalentes par colonnes.

Exemple :

Remarque : faire une opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice revient à multiplier cette matrice par une matrice élémentaire mais cette fois à droite.

Théorème : Si deux matrices M et M' sont équivalentes par colonnes alors il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ telle que $M' = MP$.

Démonstration :