

TD 0 bis Manipulation des symboles \sum et \prod

Exercice 0.1 : Soit (u_n) la suite définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$.

1. On a $\sum_{k=0}^{10} u_k = 55$ puis $\sum_{j=0}^{10} u_{j+1} = 66$.
2. Calculer $\prod_{i=1}^5 u_i = 120$ puis $\prod_{p=0}^5 u_{p+1} = 720$.

Exercice 0.2 : Compléter les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{2019} k^5 = \sum_{k=0}^{12} k^5 + \sum_{j=13}^{2019} j^5 = \sum_{p=0}^{10} p^5 + \sum_{k=11}^{2019} k^5 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2019} k^5 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{2019} i^5$
2. $\prod_{i=0}^n e^{k^2} = e^{\sum_{j=0}^n j^2}$
3. $\sum_{k=1}^{n^2} \ln(k) = \ln\left(\prod_{j=1}^{n^2} j\right) = \ln\left(\prod_{p=1}^n p \prod_{t=n+1}^{n^2} t\right)$

Exercice 0.3 : Expliciter sous forme de somme puis calculer en fonction de n la quantité :

$$11 + 101 + 1001 + \dots + 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ zéros}} 1 = \sum_{k=1}^{n+1} (10^k + 1) = n + 1 + 10 \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} = n + 1 + 10 \frac{10^{n+1} - 1}{9}$$

Exercice 0.4 : Ecrire les expressions suivantes avec le symbole \prod puis sous forme simplifiée à l'aide de la factorielle.

- $2 \times 4 \times \dots \times (2n - 2) \times 2n = \prod_{k=1}^n 2k = 2^n n!$
- $1 \times 3 \times \dots \times (2n - 1) \times (2n + 1) = \frac{1 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n-2) \times 2n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

Exercice 0.5 :

Simplifier en utilisant si besoin la notation factorielle :

$$\begin{aligned} a_n &= \prod_{k=1}^n (3k) = 3^n n! \\ b_n &= \prod_{k=3}^{3n+1} \frac{2}{k+1} = 2^{3n-1} \cdot \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{3n+2} = \frac{2^{3n-1} \times 6}{(3n+2)!}. \\ c_n &= \prod_{k=3}^{n^2+3} (3ke^{k+1}) = 3^{n^2+1} \prod_{k=3}^{n^2+3} k \prod_{k=3}^{n^2+3} e^{k+1} = 3^{n^2+1} \frac{(n^2+3)!}{2} e^{\sum_{k=3}^{n^2+3} k+1} = 3^{n^2+1} \frac{(n^2+3)!}{2} e^{\frac{(n^2+7)(n^2+1)}{2}}. \\ d_n &= \prod_{k=3}^{n+1} \frac{(k+1)(k-1)}{3} = \frac{4 \times 2}{3} \cdot \frac{5 \times 3}{3} \dots \frac{(n+2)n}{3} = \frac{n!(n+2)!}{3^{n-1} \times 6} \\ e_n &= \prod_{k=2}^{n+3} \frac{(k+1)}{3(k-1)} = \frac{1}{3^{n+2}} \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \dots \frac{n+4}{n+2} = \frac{(n+4)!}{3^{n+2}(n+2)! \times 2} \end{aligned}$$

Exercice 0.6 :

Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ les expressions suivantes :

$$a_n = \sum_{k=1}^n (-2)^k = (-2) \frac{(-2)^n - 1}{-2 - 1} = \frac{2}{3}((-2)^n - 1)$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n+1} 3^{-k} = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}(1 - (\frac{1}{3})^{n+2})$$

$$c_n = \sum_{k=2}^{n+2} (2^{k+1} - 2^{k-1}) = 2^3 - 2^1 + 2^4 - 2^2 + 2^5 - 2^3 + \dots + 2^{n+3} - 2^{n+1} = 2^{n+3} + 2^{n+2} - 4 - 2$$

$$d_n = \prod_{k=1}^{2n} 2^{3k+2} = \prod_{k=1}^{2n} 4 \cdot 2^{3k} = 4^{2n} \prod_{k=1}^{2n} 8^k = 4^{2n} \cdot 8^{\frac{2n(2n+1)}{2}} = \frac{8^{3n+1} - 8n+1}{7}$$

$$e_n = \prod_{k=1}^n 12^{k^2} = 12^{\sum_{k=1}^n k^2} = 12^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$f_n = \sum_{k=1}^{2n} (1 + (-1)^k)k = 0.1 + 2.2 + 0.3 + 2.4 + \dots + 2.2n = 4(1 + \dots + n) = 2n(n+1)$$

$$g_n = \prod_{k=1}^n 2^{k(1-(-1)^k)} = 2^{\sum_{k=1}^n k(1-(-1)^k)} = 2^{2.1+0.2+\dots+n(1-(-1)^n)} = \begin{cases} 4^{\frac{1+n-1}{2} \cdot \frac{n}{2}} = 4^{\frac{n^2}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 4^{\frac{1+n}{2} \cdot \frac{n+1}{2}} = 4^{\frac{(n+1)^2}{4}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exercice 0.7 :

Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ les expressions suivantes :

$$a_n = \sum_{k=1}^n (1 + 5 \ln(k)) = n + 5 \ln(n!)$$

$$b_n = \prod_{k=1}^n -2\sqrt{k} = (-2)^n \sqrt{n!}$$

$$c_n = \sum_{k=2}^n (\ln(k^2 - 1) - \ln(k - 1)) = \sum_{k=2}^n \ln(\frac{k^2-1}{k-1}) = \sum_{k=2}^n \ln(k+1) = \ln(n!/2)$$

$$d_n = \prod_{k=1}^{2n} (2k + 1) = \frac{(4n+1)!}{\prod_{k=1}^{2n} (2k)} = \frac{(4n+1)!}{2^{2n} (2n)!}$$

$$e_n = \prod_{k=2}^n (3k + 6) = \prod_{k=2}^n (3(k+2)) = 3^{n-1} \frac{(n+2)!}{6}$$

$$f_n = \prod_{k=-n-1}^n (2k + 1) = (-2n - 1)(-2n + 1)\dots(-1).1.3\dots(2n + 1) = (-1)^n (1.3\dots(2n + 1))^2 = (-1)^n \left(\frac{(2n+1)!}{2^n n!} \right)^2$$

$$\begin{aligned} g_n &= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n ((6k+3)^2 5^{\frac{2k}{n+1}})} \\ &= 9 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n ((2k+1)^2 5^{\frac{2k}{n+1}})} \\ &= 9 \sqrt[n]{\left(\frac{(2n+1)!}{2^n n!} \right)^2 \cdot 5^{\sum_{k=1}^n \frac{2k}{n+1}}} \\ &= 9 \sqrt[n]{\left(\frac{(2n+1)!}{2^n n!} \right)^2 \cdot 5^n} \\ &= \frac{45}{4} \sqrt[n]{\left(\frac{(2n+1)!}{n!} \right)^2} \end{aligned}$$

1 Changement d'indice et sommes télescopiques.

Exercice 1.1 :

1. On a $\sum_{k=1}^{10} k = 55$ puis $\sum_{k=0}^9 (k+1) = 55$ puis $\sum_{k=2}^{11} (k-1) = 55$. C'est la même chose.

2. On a $\prod_{k=1}^5 k = 120$ puis $\prod_{k=0}^4 (k+1) = 120$ puis $\prod_{k=2}^6 (k-1) = 120$. C'est la même chose.

On a déjà vu que la lettre utilisée pour l'indice de somme n'était pas importante. L'important est l'ensemble que décrit l'indice de somme (les entiers de 1 à 10, de 0 à n , ...). On utilisera souvent le résultat suivant :

Théorème de changement d'indice : Soit (u_n) une suite. Alors $\forall (n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ tels que $p < n$.

$$\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=p+q}^{n+q} u_{k-q} = \sum_{k=p-q}^{n-q} u_{k+q}$$

$$\prod_{k=p}^n u_k = \prod_{k=p+q}^{n+q} u_{k-q} = \prod_{k=p-q}^{n-q} u_{k+q}$$

Exercice 1.2 : (télescopique)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sum_{k=1}^n ((k+3)^3 - (k-1)^3) &= \sum_{j=4}^{n+3} j^3 - \sum_{j=0}^{n-1} j^3 \\ &= \sum_{j=4}^{n-1} j^3 + n + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 - \sum_{j=4}^{n-1} j^3 - 3^3 - 2^3 - 1^3 \\ &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 - 36 \\ \bullet \quad \prod_{k=1}^n (e^{k+3})^3 &= \left(\prod_{k=1}^n e^{k+3} \right)^3 \\ &= \left(e^{\sum_{k=1}^n k+3} \right)^3 \\ &= \left(e^{\sum_{k=4}^{n+3} j} \right)^3 \\ &= \left(e^{\frac{n(n+7)}{2}} \right)^3 \\ &= e^{\frac{3n(n+7)}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 1.3 :

Posons $i = 2n - k$, et calculons :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sum_{k=0}^{2n} (n-k) &= \sum_{i=2n}^0 i - n \\ &= \sum_{i=0}^{2n} i - n \quad \text{Ainsi } \sum_{k=0}^{2n} (n-k) = 0. \\ &= - \sum_{k=0}^{2n} (n-k) \\ \bullet \quad \sum_{k=0}^{2n} (n-k)^2 &= 2 \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \end{aligned}$$

Exercice 1.4 : (télescopique)

1. Pour $n \geq 4$, on a :

$$u_n = \sum_{k=2}^n 3 \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = 3 \left(\sum_{k=2}^n \ln(k+1) - \sum_{k=2}^n \ln(k-1) \right) = 3(\ln(n+1) + \ln(n) - \ln(2))$$

2. La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.

3. On a $u_n - 6 \ln(n) = 3(\ln(n+1) - \ln(n)) - 3 \ln(2) = 3 \ln(1 + \frac{1}{n}) - 3 \ln(2) \rightarrow -3 \ln 2$

Exercice 1.5 : (télescopique)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

1. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$2. \text{ Ainsi } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3. Ainsi la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 1.6 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

On pose $v_n = u_n^3$.

1. Il est immédiat que (u_n) est une suite à valeurs positives. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1}^3 - u_n^3 \\ &= \left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right)^3 - u_n^3 \\ &= u_n^3 + \frac{1}{u_n^6} + 3 + \frac{1}{u_n^3} - u_n^3 \\ &= 3 + \frac{1}{u_n^6} + \frac{1}{u_n^3} \\ &\geq 3 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} u_n^3 &= \sum_{k=1}^n v_k - v_{k-1} \\ &\geq \sum_{k=1}^n 3 \\ &= 3n \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n \geq \sqrt[3]{3n}$$

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton.

Exercice 2.1 : On a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

Exercice 2.2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k}_{\geq 0} \geq 1 + nx$$

Exercice 2.3 : Posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x)^n \end{array}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il se trouve que $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ et $f'(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$ et donc $f''(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$. De plus $\int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}$. Ainsi :

- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = f'(1) = n2^{n-1}$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = f''(1) + f'(1) = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(3n-1)$
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

Exercice 2.4 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

En faisant le changement d'indice $i = 2n+1-k$, $S_n = \sum_{i=2n+1}^{n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-i} = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i}$.

Ainsi $2S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} + \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} = \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} = 2^{2n+1}$ et $S_n = 2^{2n} = 4^n$.

Exercice 2.5 :

Soient n, p et $k \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq k \leq n$.

- On a $\binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \frac{(n-p)!n!}{(k-p)!(n-k)!p!(n-p)!} = \frac{n!}{(k-p)!(n-k)!p!} = \frac{n!k!}{(k-p)!(n-k)!p!k!} = \binom{n}{k} \binom{k}{p}$.

2. Ainsi

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad & \sum_{p=0}^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{p} = \binom{n}{k} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} = \binom{n}{k} 2^k \\
 & \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} \\
 & = \binom{n}{p} \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n-p}{k-p} \\
 & \stackrel{i=k-p}{=} \binom{n}{p} \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^{i+p} \binom{n-p}{i} \\
 & = \binom{n}{p} (-1)^p \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^i \binom{n-p}{i} 1^{n-p-i} \\
 & = \binom{n}{p} (-1)^p (-1+1)^{n-p} \\
 & = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \binom{n}{p} (-1)^p & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 2.6 :

1. Démontrer à l'aide d'une fonction polynomiale bien choisie que :

$$\forall (n, p, q) \in \mathbb{N}^3, \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

2. En déduire des expressions simplifiées de :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{k}^2 \text{ et } \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2.$$

3 Sommes doubles

Exercice 3.1 : Expliciter en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes :

$$a_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i = \sum_{j=1}^n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

$$b_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 - j = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{12}(2n-2) = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

$$c_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j (i+j) = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} + j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 3j^2 + j = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i^2 + 2ij + j^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2j \frac{n(n+1)}{2} + nj^2 \\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n^2(n+1) \left(\frac{2n+1}{3} + \frac{n+1}{2} \right) \\ &= \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \\ &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} ij \\ &= \sum_{j=2}^n j \cdot \frac{(j-1)j}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^3 - j^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1) \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{24} n(n+1) (3n^2 - n - 2) \\ &= \frac{1}{8} n(n+1)(n-1)(n+\frac{2}{3}) \end{aligned}$$

$$f_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| \text{ exo}$$

Exercice 3.2 : Expliciter en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes :

$$a_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} 8^{i+j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n 8^i 8^j = \sum_{j=1}^n 8^j \cdot 8^{\frac{8^n-1}{7}} = \left(8^{\frac{8^n-1}{7}} \right)^2$$

$$b_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i \ln(j+1) = \sum_{j=1}^n \ln(j+1) \sum_{i=1}^n i = \ln((n+1)!) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$c_n = \prod_{1 \leq i, j \leq n} 2i^2 9^j = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n 2i^2 9^j = 2^{n^2} \prod_{j=1}^n 9^{nj} n!^2 = 2^{n^2} n!^{2n} 9^{n \sum_{j=1}^n j} = 2^{n^2} n!^{2n} 9^{n(n+1)/2} = 2^{n^2} n!^{2n} 3^{n^2(n+1)}$$

$$d_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3n \\ 1 \leq i \leq 2n}} (i^2 + 1) = \sum_{j=1}^{3n} \sum_{i=1}^{2n} (i^2 + 1) = \sum_{j=1}^{3n} 2n + \sum_{i=1}^{2n} i^2 = \sum_{j=1}^{3n} 2n + \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} = 6n^2 + n^2(2n+1)(4n+1)$$

$$e_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j 2^i 2^j = \sum_{j=1}^n 2^j 2(2^j - 1) = 2(4 \cdot \frac{4^n - 1}{3} - 2(2^n - 1)) = 2 \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} + 2}{3}$$

$$f_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2^{i+j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j} - \sum_{j=1}^n 2^{2j} = 2 \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} + 2}{3} - 4 \cdot \frac{4^n - 1}{3} = \frac{4^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+2} + 8}{3}.$$

$$g_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^3}{(j+1)^2}$$

$$h_n = \prod_{1 \leq i \leq j \leq 3n} 4^{\frac{i^2}{j(j+1)}}$$

Exercice 3.3 :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n 2^j = 2^{n+1} - 1$$

Exercice 3.4 :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \max(i, j) \\ &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^j i + \sum_{i=j+1}^n i \right) \\ &= \sum_{j=0}^n j(j+1) + \frac{(n+j+1)(n-j)}{2} \\ &= \sum_{j=0}^n j(j+1) + \frac{n^2 - j^2 + n - j}{2} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{n^2 + j^2 + n + j}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(n^3 + n^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot n(n+1) \left(n + \frac{2n+1}{6} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot n(n+1) \frac{8n+4}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \end{aligned}$$