

TD 0 Ensembles, logique, applications CORRIGE

1 Raisonnement par la contraposée

Exercice 1.1 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que n est impair. Tout nombre impair s'écrit sous la forme $4k + 1$ ou $4k + 3$ alors on a deux cas de figure :

1. $n^2 - 1 = (4k + 1)^2 - 1 = 16k^2 + 8k + 1 - 1 = 16k^2 + 8k$ qui est divisible par 8.
2. $n^2 - 1 = (4k + 3)^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 9 - 1 = 16k^2 + 24k + 8$ qui est aussi divisible par 8.

Par la contraposée, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 c'est que n n'est pas pair.

Exercice 1.2 :

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer par la contraposée que :

$$\forall \epsilon > 0, a < \epsilon \Rightarrow a = 0$$

Supposons que $a \neq 0$ alors si on prend $\epsilon = \frac{a}{2}$, on a $\epsilon \leq a$ et donc l'assertion " $\forall \epsilon > 0, a < \epsilon$ " est fausse.

Exercice 1.3 :

Soient a et $b \in \mathbb{R}$.

1. Supposons $a, b \in \mathbb{Q}$. Alors il existe p_1, p_2, q_1, q_2 des entiers avec $q_1 \neq 0$ et $q_2 \neq 0$ tels que :
 $a = \frac{p_1}{q_1}$ et $b = \frac{p_2}{q_2}$. Ainsi $a + b = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2} \in \mathbb{Q}$. On a montré, par la contraposée que :

$$a + b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a \notin \mathbb{Q} \text{ ou } b \notin \mathbb{Q}$$

2. La réciproque est fausse : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$ alors que ni $\sqrt{2}$, ni $-\sqrt{2}$ ne sont rationnels.

Exercice 1.4 :

Par contraposée si $\max(a_1, \dots, a_n) \leq \frac{M}{n}$ alors pour tout k , $a_k \leq \frac{M}{n}$ et dans ce cas $\sum_{k=1}^n a_k \leq M$.

2 Raisonnements par l'absurde

Exercice 2.1 :

3 Raisonnement par analyse synthèse

Exercice 3.1 :

Supposons que l'on dispose d'une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m + n) = f(m) + f(n).$$

- Nécessairement $f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ et donc $f(0) = 0$
- De même $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$.

- De même $f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 2f(1) + f(1) = 3f(1)$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = nf(1)$.

1. La propriété est vraie au rang 0, 1, 2 et même 3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = nf(1)$. On a :

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n + 1)f(1).$$

et la propriété est héréditaire donc vraie.

Réciproquement toute fonction de la forme $f(n) = an$ avec $a \in \mathbb{R}$ fonctionne. En effet :

$$a(m + n) = am + an.$$

4 Quantificateurs et négation d'assertions

Exercice 4.1 :

1. Il pleut et je ne prends pas mon parapluie.
2. Il y a eu un été sans jour de pluie à Toulouse.
3. $\exists x \in A, x < 2$
4. $\forall y \in B : y \leq 5$
5. $2 > x$ ou $x < 3$

Exercice 4.2 :

1. $\exists x \in A : \forall y \in B, x \geq y$
2. $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y)$
3. $\exists n \in \mathbb{N} : u_n > 4$
4. $\exists \epsilon > 0 : \exists x \in \mathbb{R} : \forall \eta > 0, \exists y \in \mathbb{R} : |x - y| \leq \eta \text{ ET } |f(x) - f(y)| > \epsilon$
5. $\exists \epsilon > 0 : \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq \eta \text{ ET } |f(x) - f(y)| > \epsilon$

Exercice 4.3 :

Ecrire les assertions suivantes avec des quantificateurs :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 12$
2. $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A$
3. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : u_n < A$
4. $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A$
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y)$
6. $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
7. $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$

Exercice 4.4 : (ordre des quantificateurs) :

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x < y$ VRAI on choisit y en fonction de x .
 (b) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x < y$ FAUX il n'existe pas de réel plus petit que tous les autres.
2. (a) $\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ est impliquée par la suivante car ici η dépend à priori de x
 (b) $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ ici η ne dépend que de ϵ donc va convenir dans le cas au dessus.
3. Il n'y a pas de différence entre les assertions suivantes (on peut échanger deux symboles $\forall$)
 (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, x^2 + y^2 > 0$
 (b) $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 > 0$
4. Il n'y a pas de différence entre les assertions suivantes (on peut échanger deux symboles $\exists$)
 (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^*, x^2 + y^2 > 0$
 (b) $\exists y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 > 0$

5 Ensembles**Exercice 5.1 :**

Soit E un ensemble et soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \cup B = A \cap B$.

On procède par double inclusion :

- $\subset$) Soit $x \in A$. On a $A \subset A \cup B$ donc $x \in A \cup B$ mais $A \cup B = A \cap B$ donc $x \in A \cap B$ et en particulier $x \in B$.
On a donc $A \subset B$.
- $\supset$) Soit $x \in B$. On a $B \subset A \cup B$ donc $x \in A \cup B$ mais $A \cup B = A \cap B$ donc $x \in A \cap B$ et en particulier $x \in A$.
On a donc $B \subset A$.

Ainsi $A = B$.

Exercice 5.2 :

(manipulation) : Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$. Montrer que :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

- $\subset$) Soit $x \in A \setminus (B \cup C)$ alors $x \in A$ et $x \notin B \cup C$. Or

$$x \notin B \cup C \Leftrightarrow \text{NON}(x \in B \cup C) \Leftrightarrow \text{NON}(x \in B \text{ OU } x \in C) \Leftrightarrow x \notin B \text{ ET } x \notin C.$$

Ainsi $x \in A$ mais $x \notin B$ et $x \in A$ mais $x \notin C$. On a bien $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ et par conséquent $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

- $\supset$) Soit $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ alors $x \in A$ et $x \notin B$ et $x \in A$ et $x \notin C$ ce qui se résume (on a deux fois la même assertion) à $x \in A$ et $x \notin B$ et $x \notin C$ qui équivaut à $x \in A$ et $x \notin B \cup C$ (cf ce qui précède sur la négation d'appartenir à $B \cup C$)

6 Applications injectives, surjectives et bijectives.

Exercice 6.1 :

1. On se rend compte que $f(n) > 0$ donc 0 n'a pas d'antécédent par f et donc f n'est pas surjective. En revanche si m et n sont des entiers naturels,

$$f(m) = f(n) \Leftrightarrow m + 1 = n + 1 \Leftrightarrow m = n$$

Donc f est injective.

Il est immédiat que $g(0) = g(1)$ donc g n'est pas injective. En revanche si $m \in \mathbb{N}$, alors $m = g(m - 1)$ donc g est bien surjective.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f \circ g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n & \text{sinon} \end{cases}$ et $g \circ f(n) = n$.

Exercice 6.2 :

1. Supposons que f n'est pas injective : $\exists(x, y) \in E^2$ tels que $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$. Alors

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = g \circ f(y)$$

et $g \circ f$ n'est pas injective. Par la contraposée $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective. En revanche on ne peut rien dire de g , si je prends $E = F = G$ et $f = g = id_E$ alors la composée est injective avec g injective mais l'exercice précédent montre un $g \circ f$ injectif avec un g non injectif.

2. Supposons que g n'est pas surjective : $\exists y \in F$ tels que $f(x) = y$ est une équation sans solution. S'il existe $x \in E$ tel que :

$$y = g \circ f(x)$$

alors $f(x)$ est un antécédent à y par g . C'est absurde donc $g \circ f$ n'est pas surjective. Par la contraposée $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective. En revanche on ne peut rien dire de f , si je prends $E = F = G$ et $f = g = id_E$ alors la composée est surjective avec f surjective mais l'exercice précédent montre un $f \circ g$ surjectif avec un g non surjectif.

Exercice 6.3 :

Exercice 6.4 :

Soient $(z, t) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (z, t)$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (z, t) \\ \Leftrightarrow (x - 3y, 2x + 4y) &= (z, t) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = z \\ 2x + 4y = t \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+8z}{10} \\ y = \frac{t-2z}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on a prouvé qu'il existait un unique antécédent à tout élément de l'ensemble d'arrivée. Donc f est bien bijective.

Exercice 6.5 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \left(\frac{-3x + 4y - 4}{5}, \frac{4x + 3y + 2}{5} \right)$$

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculons :

$$\begin{aligned}
 & f \circ f(x, y) \\
 &= f(f(x, y)) \\
 &= f\left(\underbrace{\frac{-3x+4y-4}{5}}_X, \underbrace{\frac{4x+3y+2}{5}}_Y\right) \\
 &= \left(\frac{-3X+4Y-4}{5}, \frac{4X+3Y+2}{5}\right) \\
 &= \left(\frac{-3\frac{-3x+4y-4}{5}+4\frac{4x+3y+2}{5}-4}{5}, \frac{4\frac{-3x+4y-4}{5}+3\frac{4x+3y+2}{5}+2}{5}\right) \\
 &= \left(\frac{9x-12y+12+16x+12y+8-20}{25}, \frac{-12x+16y-16+12x+9y+6+10}{25}\right) \\
 &= (x, y)
 \end{aligned}$$

2. Ainsi $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$ donc f est bijective (et même involutive) et sa bijection réciproque est $f^{-1} = f$.

7 Image directe, image réciproque

Exercice 7.1 :

Exercice 7.2 : Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$.

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x \in A$. Par définition, $f(x) \in f(A)$ donc x est antécédent d'un élément de $f(A)$ et $x \in f^{-1}(f(A))$. On a bien $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$ et $y \in f(f^{-1}(B))$. Par définition $y = f(x)$ avec $x \in f^{-1}(B)$ donc x est par définition antécédent d'un élément de B mais x est l'antécédent de y . C'est bien que $y \in B$.

On a bien montré que $B \supset f(f^{-1}(B))$.

3.
 - $\Rightarrow$ Soient x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$ alors $y \in f^{-1}(f(\{x\}))$ car $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ et y est un antécédent de $f(x) = f(y)$. Or $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ par hypothèse donc $y = x$ et f est injective.
 - $\Leftarrow$ On suppose f injective. Soit $A \subset P(E)$. On sait déjà que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Montrons l'inclusion réciproque : soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Cela implique que $f(x)$ est dans $f(A)$ et cela veut dire que $f(x)$ a un antécédent dans A . Or x est le seul antécédent de $f(x)$ par injectivité donc $x \in A$.
4.
 - $\Rightarrow$ Soit $y \in F$. Par hypothèse $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$ donc $f^{-1}(\{y\})$ est non vide ce qui signifie que y a des antécédents donc f est bien surjective.
 - $\Leftarrow$ On suppose f surjective. Soit $B \subset P(F)$. On sait déjà que $B \supset f(f^{-1}(B))$. Montrons l'inclusion réciproque : soit $y \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ or $x \in f^{-1}(B)$ car son image par f , y est dans B . On a bien $y \in f(f^{-1}(B))$.

Exercice 7.3 :

8 Récurrence

Exercice 8.1 :

Démontrer les trois formules du formulaire suivantes :

- Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : " $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ " :

La propriété est vraie au rang 0 car $0=0$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc P_{n+1} est vraie

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : " $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ " :

La propriété est vraie au rang 0 car $0=0$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

donc P_{n+1} est vraie

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : " $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ " :

La propriété est vraie au rang 0 car $0=0$

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

donc P_{n+1} est vraie

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 8.2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$P_n : " |\sin(nx)| \leq n |\sin(x)| "$$

- P_0 est vraie puisque $0 \leq 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie, on a :

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx+x)| \\ &= |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin x| \\ &\leq |\sin(nx)| \underbrace{|\cos(x)|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos(nx)|}_{\leq 1} |\sin x| \\ &\leq |\sin(nx)| + |\sin x| \\ &\leq n |\sin(x)| + |\sin(x)| \\ &= (n+1) |\sin(x)| \end{aligned}$$

donc P_{n+1} est vraie.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$.

Exercice 8.3 :

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ ainsi que (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1. Dans le cas où $a = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + bn$.
2. On suppose que $a \neq 1$.
 - (a) On a :

$$l = al + b \Leftrightarrow l = \frac{b}{1-a}$$

- (b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = u_n - l$$

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - l \\ &= au_n + b - al - b \\ &= a(u_n - l) \\ &= a v_n \end{aligned}$$

Ainsi v_n est géométrique de raison a .

- (c) On a alors $u_n = v_n + l = v_0 a^n + l = (u_0 - l)a^n + l$
- (d) On voit directement, avec les connaissances de terminale que v_n est convergente si et seulement si $-1 < a < 1$ ou si $a = 1$ et $b = 0$.

Exercice 8.4 :

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P_n : \forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$

- P_1 est évidemment vraie car $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n est vraie. On a

$$\begin{aligned} \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n+1 \text{ fois}}(x) &= \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(f(x)) \\ &= \frac{f(x)}{\sqrt{1+ncf(x)^2}} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+nc\left(\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}\right)^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}\sqrt{1+nc\frac{x^2}{1+cx^2}}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+cx^2+ncx^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)cx^2}} \end{aligned}$$

et P_{n+1} est vraie.

- Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$

Exercice 8.5 :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2, u_1 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : "u_n = 2^n + 3^n"$.

- P_0 est vraie car $u_0 = 2 = 2^0 + 3^0$ et P_1 est vraie car $u_1 = 5 = 2^1 + 3^1$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_0, \dots, P_{n+1}$ soient vrais, prouvons P_{n+2}

$$\begin{aligned}u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\&= 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) \\&= 4 \cdot 2^n - 9 \cdot 3^n \\&= 2^{n+2} - 3^{n+2}\end{aligned}$$

Ainsi P_{n+2} est vraie

- On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 8.6 : J'ai rédigé cette correction volontairement par l'absurde, parce que j'en ai marre de taper des récurrence mais aussi pour vous montrer que les récurrences peuvent toutes être sabotées de cette manière.

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et vérifiant :

$$\forall n \in A, 2n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$$

1. $2^0 \in A$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n \notin A$. Prenons alors le n minimal tel que $2^n \notin A$. On a alors $2^{n-1} \in A$ mais lorsqu'un nombre est dans A son double aussi et $2^n \in A$ ce qui est absurde.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \in A$.

2. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \notin A$ alors n n'est pas une puissance de 2. Prenons $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p < n < 2^{p+1}$.

Alors $2^{p+1} \in A \Rightarrow 2^{p+1} - 1 \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow n \in A$ (on descend jusqu'à A , on pourrait rédiger une récurrence propre pour montrer ce résultat).

Exercice 8.7 :