

TD 1 Nombres complexes et trigonométrie.

1 Premières propriétés

Exercice 1.1 :

Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

1. $(1 - 2i)(3 + i)(5 + 4i)$
2. $\frac{1+i}{4-3i}$
3. $(5 + i)^3 - (2 + 3i)^2$
4. $\frac{(1+4i)^2 - (8+i)^2}{(4+2i)^3 + (1+i)^2}$

Exercice 1.2 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $z + |z| = 1 + i$
2. $z - |z| = 1 - 2i$
3. $z + 2\bar{z} = 5 + 3i$

Exercice 1.3 :

1. Trouver par le calcul tous les nombres complexes vérifiant :

$$|z - 1| = |z| = 1$$

2. Retrouver très rapidement ce résultat géométriquement.

Exercice 1.4 :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. Trouver $x \in \mathbb{C}$ tel que $z = \frac{x+i}{x-i}$.
2. Montrer que $|z| = 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.5 :

Soient $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. Démontrer les inégalités suivantes et étudier les cas d'égalité.

1. $|u + v| + |u - v| \leq 2(|u| + |v|)$
2. $|u + v| + |u - v| \geq |u| + |v|$
3. $|u + v| + |u - v| \geq 2|u|$
4. $|u + v| + |u - v| \geq 2|v|$

Exercice 1.6 :

Soient $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. En considérant la quantité $(|u| - |v|)^2$, montrer que :

$$|uv| \leq \frac{|u|^2 + |v|^2}{2}.$$

2 Nombres complexes de module 1

Exercice 2.1 :

On considère l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{U} \\ x & \mapsto & \frac{1+ix}{1-ix} \end{array}$.

1. Montrer que ϕ est bien définie.
2. L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.2 :

Soient $(u, v, w) \in \mathbb{U}^3$ tels que $u + v + w = 0$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Montrer que l'on a $u = jv = j^2w$ ou bien $u = jw = j^2v$.

3 Trigonométrie et exponentielle complexe

Exercice 3.1 :

Déterminer θ tel que $\cos(2\theta) = \sin(\theta)$ de deux manières différentes.

Exercice 3.2 :

Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 3.3 :

Linéariser $\sin(x)^3$ et $\cos(x)^3$.

Exercice 3.4 :

1. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2. Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 3.5 :

Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\frac{\pi}{3})}{2^k}$.

Exercice 3.6 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soit $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{2k\pi}{n})$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2$.

4 Equations et forme trigonométrique

Exercice 4.1 :

Calculer les racines carrées des nombres suivants :

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $3i$, $1 - i$, $-1 + i$, -12 .

Exercice 4.2 :

Calculer sans développer :

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \text{ et } \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{3i}\right)^{12}.$$

Exercice 4.3 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^5 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-1 + i\sqrt{3}}$$

Exercice 4.4 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $z^2 + (5 - 11i)z - 22 - 29i = 0$.
2. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$.
3. $iz^2 + iz + 1 + i = 0$.
4. $z^2 - 2^{\theta+1}z\cos(\theta) + 2^{2\theta} = 0$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.5 :

Résoudre l'équation $z^4 - (5 + 2i)z^2 - 50i = 0$.

Exercice 4.6 :

1. a) Résoudre l'équation $4iz^3 + 2(1 + 3i)z^2 - (5 + 4i)z + 3(1 - 7i) = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.
2. b) Résoudre l'équation $z^3 - (5 - 3i)z^2 + (6 - 11i)z + 2 + 16i = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.
3. c) Résoudre l'équation $z^4 + 4iz^2 + 12(1 + i)z - 45 = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle et une solution imaginaire pure.

5 Géométrie et nombres complexes

Exercice 5.1 :

Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\text{Arg}(z - 2i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice 5.2 :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle p et q ses racines carrées. Trouver une condition nécessaire et suffisantes pour que les points d'affixes z, p et q forment un triangle rectangle.

Exercice 5.3 :

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a + ib = c + id$ et $a + c = b + d$.

1. Que pouvez-vous dire des points d'affixes a, b, c, d ?
2. En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $(z - a)^4 = (z - b)^4 = (z - c)^4 = (z - d)^4$

Exercice 5.4 :

Soit ABC un triangle équilatéral et M un point du cercle circonscrit au triangle ABC, appartenant à l'arc BC qui ne contient pas A. Montrer que :

$$MA = MB + MC.$$

1. En considérant le point $I \in [AM]$ tel que $MI = MB$, démontrer que MIB est équilatéral. Conclure en utilisant la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Retrouver le résultat avec les nombres complexes. (à trouver une solution)

Exercice 5.5 :

On considère la fonction complexe définie par $f(z) = z^2$. Quelle est l'image par f de :

- une droite passant par l'origine
- une demi droite passant par l'origine
- un cercle centré en l'origine

Exercice 5.6 :

Trouver les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que z^3 , z et 1 soient alignés.

Exercice 5.7 :

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a , b et c . On suppose que $b \in \mathbb{R}_+$ et que 0 est le milieu de $[BC]$.

1. Montrer que ABC est isocèle en A si et seulement si $a + \bar{a} = 0$.
2. Montrer que ABC est rectangle en A si et seulement si $a\bar{a} = b^2$
3. Dédurre des questions précédentes le cas où 0 n'est pas le milieu de BC et où $b \in \mathbb{C}$.

Exercice 5.8 :

Reconnaitre et préciser les caractéristiques des applications suivantes f , g , h , k et l définies par :

1. $f(z) - i = (1 + i)(z - i)$
2. $g(z) = (-2 + 2i)z + 5 + i$
3. $h(z) = \frac{1+i}{1-i}z + 2i$
4. $k(z) = \frac{2-i}{i+1}z$
5. $l(z) = (-1 + 2i)z + 3 - 4i$

Exercice 5.9 :

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a , b , et c . Calculer l'affixe du centre du cercles circonscrit à ABC en fonction de a , b et c .

Exercice 5.10 :

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a , b , et c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

Indication : Penser aux rotations