

TD 11 : Arithmétique

Exercice 0.1 :

1. Déterminer $\mathcal{D}(12)$ et $\mathcal{D}(15)$.
2. En déduire $12 \wedge 15$.
3. Y a-t-il plus simple ?

Exercice 0.2 :

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ non nuls. Montrer que $(ac) \wedge (bc) = (a \wedge b)c$.

Exercice 0.3 :

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ non nuls. Montrer que si $a \wedge b = 1$ et si $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge bc = 1$.

Exercice 0.4 :

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ non nuls. Montrer que si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$ alors $a \mid c$.

Exercice 0.5 :

Déterminer tous les entiers naturels non nuls a et b tels que $a + b = 4(a \wedge b)$.

Exercice 0.6 :

Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls. Montrer que $(ac) \vee (bc) = (a \vee b)c$.

Exercice 0.7 :

Soit n un entier naturel. On considère sa décomposition en facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$$

A quelle condition sur $\alpha_1 \dots \alpha_r$, n est-il un carré parfait ?

Exercice 0.8 :

Soient a et b deux entiers tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $a^m \wedge b^n = 1$.

Exercice 0.9 :

Calculer sans aide informatique le PGCD de 3000 et 201387.

Exercice 0.10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

Exercice 0.11 :

Soient a et b deux entiers non nuls. On note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b . Déterminer, en fonction de q , le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} .

Exercice 0.12 : Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on note $M_a = 2^a - 1$.

Montrer que M_a premier $\Rightarrow a$ premier.

Exercice 0.13 :

Résoudre dans \mathbb{Z}^2 les équations :

1. $xy = 2x + 3y$.
2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.