

TD 11 : Arithmétique

Exercice 0.1 :

1. On a $\mathcal{D}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ et $\mathcal{D}(15) = \{1, 3, 5, 15\}$.
2. Ainsi $12 \wedge 15 = 3$.
3. Il y a plus simple ici en disant $12 = 2^2 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$ et en prenant la puissance minimale de chaque facteur premier.

Exercice 0.2 :

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ non nuls. Montrer que $(ac) \wedge (bc) = (a \wedge b)c$.

- Comme $a \wedge b \mid a$ alors $(a \wedge b)c \mid ac$. De même $(a \wedge b)c \mid bc$ et par caractérisation du pgcd $(a \wedge b)c \mid (ac) \wedge (bc)$.
- On écrit alors $(ac) \wedge (bc) = (a \wedge b)cd$ comme $(a \wedge b)cd \mid ac$ alors $(a \wedge b)d \mid a$ et de même $(a \wedge b)d \mid b$ donc $d = 1$ sinon on aurait $(a \wedge b)d$ diviseur commun de a et b plus grand que le PGCD.

Exercice 0.3 :

Si $d \mid a$ et $d \mid bc$ alors $d \mid ac$ et $d \mid bc$ donc $d \mid ac \wedge bc = (a \wedge b)c = c$ d'après l'exercice précédent donc $d \mid a$ et $d \mid c$ d'où $d = 1$.

Ainsi si $a \wedge b = 1$ et si $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge bc = 1$.

Exercice 0.4 :

Si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$ alors comme $a \mid ac$ alors $a \mid (bc \wedge ac) = (a \wedge b)c = c$.

Exercice 0.5 :

Déterminons tous les entiers naturels non nuls a et b tels que $a + b = 4(a \wedge b)$.

Ecrivons $a = (a \wedge b)a'$ et $b = (a \wedge b)b'$.

On a $a + b = 4(a \wedge b) \Leftrightarrow (a \wedge b)a' + (a \wedge b)b' = 4(a \wedge b) \Leftrightarrow a' + b' = 4$

On a alors le choix entre $a' = 1$ et $b' = 3$ ou $a' = 3$ et $b' = 1$ ($a' = b' = 2$ étant exclu)

Les solutions sont donc les couples $(d, 3d)$ et $(3d, d)$.

Exercice 0.6 :

Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls. Montrer que $(ac) \vee (bc) = (a \vee b)c$.

On a $(ac) \vee (bc) = \frac{acbc}{(ac) \wedge (bc)} = \frac{acbc}{(a \wedge b)c} = c \frac{ab}{a \wedge b} = c(a \vee b)$

Exercice 0.7 :

Soit n un entier naturel. On considère sa décomposition en facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$$

n est-il un carré parfait si et seulement si les α_i sont tous pairs.

En effet si $n = k^2$ on décompose $k = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$ (tout facteur premier de k est facteur premier de n et inversement) donc $n = p_1^{2\beta_1} \dots p_r^{2\beta_r}$. Par unicité $\alpha_i = 2\beta_i$ pour tout i

La réciproque est évidente : si α_i est de la forme $2\alpha'_i$ alors $n = p_1^{2\alpha'_1} \times \dots \times p_r^{2\alpha'_r} = \left(p_1^{\alpha'_1} \times \dots \times p_r^{\alpha'_r} \right)^2$

Exercice 0.8 :

Soient a et b deux entiers tels que $a \wedge b = 1$.

Si $a^m \wedge b^n \neq 1$, on prend p un diviseur premier commun à a^m et b^n alors $p \mid a$ et $p \mid b$ par unicité de la décomposition en facteur premier (sinon p n'apparaît pas dans la décomposition de a^m et b^n) et c'est absurde car $a \wedge b = 1$.

Exercice 0.9 :

On a $3000 = 3 \times 2^3 \times 5^3$ et 201387 n'est divisible ni par 2 ni par 5 mais il est divisible par 3 (somme des chiffres égale à 18) donc le PGCD est 3.

Exercice 0.10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a } (n+1)^n - 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} n^k = n^2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} n^k$$

Or ces 2 termes sont divisibles par n^2 donc $(n+1)^n - 1$ est divisible par n^2 .

Exercice 0.11 :

Soient a et b deux entiers non nuls. On note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b .

Ecrivons $a-1 = bq + r$ avec $0 \leq r \leq b-1$

$$\text{Donc } ab^n - b^n = b^{n+1}q + rb^n \text{ et } ab^n - 1 = b^{n+1}q + rb^n + b^n - 1.$$

Or $b^n - 1 \leq rb^n + b^n - 1 \leq b^{n+1} - 1$ donc $rb^n + b^n - 1$ est le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} . Le quotient reste q .

Exercice 0.12 : Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on note $M_a = 2^a - 1$.

Montrer que M_a premier $\Rightarrow a$ premier.

Par contraposée, si a se décompose $a = pq$ avec $p, q \neq 1$ mais alors :

$$M_a = 2^{pq} - 1 = (2^p - 1) \sum_{k=0}^{q-1} 2^{pk} \text{ se décompose.}$$

Exercice 0.13 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

1. Si $d = x \wedge y$, $x = dx'$ et $y = dy'$.

$$\text{On écrit } xy = 2x + 3y \Leftrightarrow x(y-2) = 3y \Leftrightarrow x'(y-2) = 3y' \text{ donc } x' \mid 3 \text{ et } x' = \pm 1 \text{ ou } \pm 3$$

$$\text{De même } y' \mid 2 \text{ et } y' = \pm 1 \text{ ou } \pm 2$$

- Si $x' = 1$ et $y' = 1$ alors $x = y = 5$
- Si $x' = 1$ et $y' = 2$ alors $x = 4$ et $y = 8$
- Si $x' = 3$ et $y' = 1$ alors $x = 9$ et $y = 3$
- Si $x' = 3$ et $y' = 2$ alors $x = 6$ et $y = 4$
- x et y ne peuvent pas être négatifs tous les 2
- ...

2. On cherche x et y non nuls tels que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5y + 5x = xy \text{ et on résout comme à la question précédente.}$$