TD 12 : $\mathbb{G}$éométrie plane

1 Préliminaires

Exercice 1.1 :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si Vect($\overrightarrow{u}$)= Vect($\overrightarrow{v}$).

Exercice 1.2 :

Soient A et B deux points, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

Montrer que A+Vect($\overrightarrow{u}$)=B+Vect($\overrightarrow{v}$) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

2 Coordonnées

Exercice 2.1 :

Trouver les coordonnées polaires des points :

$A(1, -\sqrt{3})$, $B(4,3)$ et $C(-6,8)$

Exercice 2.2 :

On considère un repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ainsi que les points $B(1,0)$ et $C(\alpha, \beta)$.

1. Déterminer les coordonnées de G, barycentre de A, B et C.
2. Déterminer les coordonnées de H, l'orthocentre de A, B et C.
3. Déterminer les coordonnées de Ω centre du cercle circonscrit à A, B et C.
4. Vérifier que $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{\Omega G}$.
5. Montrer que les symétriques de H par rapport aux 3 côtés appartiennent au cercle circonscrit.
6. Montrer que les symétriques de H par rapport aux milieux des 3 côtés appartiennent encore au cercle circonscrit.

Exercice 2.3 :

Montrer que les trois hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.

3 Produit scalaire, angles

Exercice 3.1 :

Donner l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{i} + \sqrt{3}\overrightarrow{j}$.

Exercice 3.2 :

Soit ABC un triangle et I le milieu de [AB].

Montrer que pour tout point M, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Exercice 3.3 :

Soit ABC un triangle.

Montrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Exercice 3.4 :

Soient A_0, B et C trois points non alignés. On définit la suite (A_n) pour tout $n \geq 1$: A_n est le centre du cercle inscrit à $A_{n-1}BC$.

1. On note $\alpha_n = \widehat{CBA_n}$ et $\beta_n = \widehat{BCA_n}$. Exprimer α_n et β_n en fonction de α_0, β_0 et n.
2. Calculer la limite de $\frac{\tan(x)}{x}$ lorsque $x \to 0$.
3. En déduire les limites de $(2^n \tan(\alpha_n))$ et $(2^n \tan(\beta_n))$.
4. Calculer les coordonnées du point A_n dans le repère orthonormé $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{j})$ dans lequel A_0 a une ordonnée positive (information importante pour le choix de $\overrightarrow{j}$)
5. En déduire que (A_n) converge vers un point à déterminer.

4 Orthogonalité

Exercice 4.1 :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs avec $\overrightarrow{u} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{w}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.
3. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ s'appelle projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur Vect$(\overrightarrow{u})$. Faire un dessin.

5 Droites

Exercice 5.1 :

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites qui se coupent en un point A.

Montrer que l'ensemble des points à égale distance de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la réunion de deux droites orthogonales.

Exercice 5.2 :

Soit D_λ la droite d'équation :

$$(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2.$$

Montrer qu'il existe un point équidistant à toutes les droites D_λ.

6 Cercles

Exercice 6.1 :

Soient A et B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Soit M un point disctinct de A et de B. Montrer que :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi].$$

Indication : on pourra se placer dans un repère centré en Ω où A et B ont pour coordonnées polaires (R, θ) et $(R, -\theta)$.

Exercice 6.2 :

Déterminer le centre du cercle passant par $A(1,2)$, $B(4,3)$ et $C(-6,8)$.

Exercice 6.3 :

Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

Ce cercle coupe l'axe des abscisses en O et A, l'axe des ordonnées en O et B, la droite d'équation $y = x$ en O et D.

On considère $\mathcal{C}_1$ le cercle de diamètre$[OA]$, $\mathcal{C}_2$ le cercle de diamètre $[OB]$ et $\mathcal{C}_3$ le cercle de diamètre $[OD]$. On note I_1 l'intersection (autre que O) de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, I_2 l'intersection (autre que O) de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ et I_3 l'intersection (autre que O) de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1$.

Montrer que I_1, I_2 et I_3 sont alignés.