

# TD 1 Nombres complexes et trigonométrie.

## 1 Premières propriétés

### Exercice 1.1 :

$$1. (1 - 2i)(3 + i)(5 + 4i) = 45 - 5i$$

$$2. \frac{1+i}{4-3i} = \frac{1}{25} + \frac{7}{25}i$$

$$3. (5 + i)^3 - (2 + 3i)^2 = 115 + 62i$$

$$4. \frac{(1+4i)^2-(8+i)^2}{(4+2i)^3+(1+i)^2} = \frac{-492+1723i}{2089}$$

### Exercice 1.2 :

Résoudre les équations suivantes :

$$1. \text{ Ecrivons } z = x + iy \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} z + |z| &= 1 + i \Leftrightarrow x + iy + \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + \sqrt{x^2 + 1} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 1 - x \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x^2 + 1 = (1 - x)^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Réciproquement le nombre  $i$  convient.

$$\begin{aligned} 2. z - |z| &= 1 - 2i \Leftrightarrow x + iy - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - 2i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x - \sqrt{x^2 + 4} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x - 1 = \sqrt{x^2 + 4} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ (x - 1)^2 = x^2 + 4 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Réciproquement  $-\frac{3}{2} - 2i$  ne fonctionne pas. Il n'y a pas de solution !

$$\begin{aligned} 3. z + 2\bar{z} &= 5 + 3i \Leftrightarrow x + iy + 2x - 2iy = 5 + 3i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5 \\ -y = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

### Exercice 1.3 :

1. Ecrivons  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |z - 1| = |z| = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Vérifier l'équation donnée c'est être à l'intersection du cercle de centre 0 et de rayon 1 et du cercle de centre  $(1,0)$  et de rayon 1. D'où le résultat (faites un dessin).

Exercice 1.4 :

Exercice 1.5 :

Exercice 1.6 :

## 2 Nombres complexes de module 1

Exercice 2.1 :

Exercice 2.2 :

## 3 Trigonométrie et exponentielle complexe

Exercice 3.1 :

- On écrit  $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ . Ainsi on cherche à résoudre

$$1 - 2\sin^2(\theta) = \sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{1}{2} \text{ ou } -1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{-\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi.$$

- on écrit que  $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$ . Ainsi on cherche à résoudre :

$$\cos(2\theta) = \cos(\pi/2 - \theta) \Leftrightarrow 2\theta = \pi/2 - \theta \text{ ou } 2\theta = -\pi/2 + \theta \text{ mod } 2\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$$

Exercice 3.2 :

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{\sin(x)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos(x + \pi/6) = \cos(\pi/4) \\ &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{aligned}$$

Exercice 3.3 :

- On a :

$$\begin{aligned} \sin(x)^3 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{1}{-8i} \left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\ &= \frac{-1}{4} \cdot \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \\ &= \frac{-\sin(3x)}{4} + 3\frac{\sin(x)}{4} \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
\cos(x)^3 &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + 3\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) \\
&= \frac{\cos(3x)}{4} + 3\frac{\cos(x)}{4}
\end{aligned}$$

**Exercice 3.4 :**

1. Ecrivons la formule de moivre

$$\begin{aligned}
\cos(4x) + i \sin(4x) &= (\cos(x) + i \sin(x))^4 \\
&= \cos^4(x) + 4i \sin(x) \cos^3(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) - 4i \cos(x) \sin^3(x) + \sin^4(x)
\end{aligned}$$

Ainsi en prenant partie réelle et imaginaire :

$$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) + \sin^4(x)$$

et

$$\sin(4x) = 4 \sin(x) \cos^3(x) - 4 \cos(x) \sin^3(x)$$

2. Ecrivons la formule de moivre

$$\begin{aligned}
\cos(5x) + i \sin(5x) &= (\cos(x) + i \sin(x))^5 \\
&= \cos^5(x) + 5i \sin(x) \cos^4(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x) - 10i \cos(x)^2 \sin^3(x) + 5 \cos(x) \sin^4(x) + i \sin^5(x)
\end{aligned}$$

Ainsi en prenant partie réelle et imaginaire :

$$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x) 5 \cos(x) \sin^4(x)$$

et

$$\sin(5x) = 5 \sin(x) \cos^4(x) - 10 \cos(x)^2 \sin^3(x) + \sin^5(x)$$

**Exercice 3.5 :**

Regardons  $\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\frac{\pi}{3})}{2^k}$  pour les premières valeurs de  $n$ .

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{2} + \frac{\cos(2\frac{\pi}{3})}{2^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 1/8$$

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{2} + \frac{\cos(2\frac{\pi}{3})}{2^2} + \frac{\cos(3\frac{\pi}{3})}{2^3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{2} + \frac{\cos(2\frac{\pi}{3})}{2^2} + \frac{\cos(3\frac{\pi}{3})}{2^3} + \frac{\cos(4\frac{\pi}{3})}{2^4} = \frac{-1}{32}$$

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{2} + \frac{\cos(2\frac{\pi}{3})}{2^2} + \frac{\cos(3\frac{\pi}{3})}{2^3} + \frac{\cos(4\frac{\pi}{3})}{2^4} + \frac{\cos(5\frac{\pi}{3})}{2^5} = \frac{-1}{32} + \frac{1}{64} = -\frac{1}{64}$$

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{2} + \frac{\cos(2\frac{\pi}{3})}{2^2} + \frac{\cos(3\frac{\pi}{3})}{2^3} + \frac{\cos(4\frac{\pi}{3})}{2^4} + \frac{\cos(5\frac{\pi}{3})}{2^5} + \frac{\cos(6\frac{\pi}{3})}{2^6} = -\frac{1}{64} + \frac{1}{64} = 0$$

Tout d'abord, remarquons que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(3k\frac{\pi}{3})}{2^{3k}} + \frac{\cos((3k+1)\frac{\pi}{3})}{2^{3k+1}} + \frac{\cos((3k+2)\frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}} &= \frac{1}{2^{3k+2}} (4 \cos(3k\frac{\pi}{3}) + 2 \cos((3k+1)\frac{\pi}{3}) + \cos((3k+2)\frac{\pi}{3})) \\
&= \frac{1}{2^{3k+2}} (4 \cos(k\pi) + 2 \cos(\frac{\pi}{3} + k\pi) + 4 \cos(2\frac{\pi}{3} + k\pi)) \\
&= \frac{1}{2^{3k+2}} (4(-1)^k + 2(-1)^k \cos(\frac{\pi}{3}) + 4(-1)^k \cos(2\frac{\pi}{3})) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Ainsi si  $n$  est un multiple de 3, alors  $\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\frac{\pi}{3})}{2^k} = 0$

- Si  $n$  est de la forme  $3p+1$ , alors  $\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\frac{\pi}{3})}{2^k} = \frac{\cos((3p+1)\frac{\pi}{3})}{2^{3p+1}} = \frac{(-1)^p}{2^{3p+2}}$

- Si  $n$  est de la forme  $3p+2$ , alors  $\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\frac{\pi}{3})}{2^k} = \frac{\cos((3p+1)\frac{\pi}{3})}{2^{3p+1}} + \frac{\cos((3p+2)\frac{\pi}{3})}{2^{3p+2}} = \frac{(-1)^p}{2^{3p+2}} - \frac{(-1)^p}{2^{3p+3}} = \frac{(-1)^p}{2^{3p+3}}$

**Exercice 3.6 :**

## 4 Equations et forme trigonométrique

### Exercice 4.1 :

Calculer les racines carrées des nombres suivants :

- $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\pi/3} = (e^{i\pi/6})^2$  donc les racines carrées sont  $\pm \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$
- $3i = (\sqrt{3}e^{i\pi/4})^2$  donc les racines carrées sont  $\pm \left( \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \right)$
- $1 - i = \left( \pm \sqrt{\sqrt{2}}e^{-i\pi/8} \right)^2$
- $-1 + i = \left( \pm \sqrt{\sqrt{2}}e^{i3\pi/8} \right)^2$ ,
- $-12 = (\pm \sqrt{12}i)^2$

### Exercice 4.2 :

### Exercice 4.3 :

### Exercice 4.4 :

Résoudre les équations suivantes :

1.  $z^2 + (5 - 11i)z - 22 - 29i = 0.$

Calculons :

$$\Delta = (5 - 11i)^2 - 4.1.(-22 - 29i) = 25 - 110i - 121 + 88 + 116i = -8 + 6i$$

On cherche  $\delta = a + ib$  tel que  $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 3 \end{cases}$ . Je chosis  $\delta = 1 + 3i$ .

Il y a donc deux solutions :  $z_1 = \frac{-5+11i-1-3i}{2} = -3 + 4i$  et  $z_2 = \frac{-5+11i+1+3i}{2} = -2 + 7i$ .

2.  $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0.$

Calculons :

$$\Delta = (-2i)^2 - 4.1.(-1 + 2i) = -4 + 4 - 8i = -8i$$

Or  $-8i = (2 - 2i)^2$

Il y a donc deux solutions :  $z_1 = \frac{2i-2+2i}{2} = -1 + 2i$  et  $z_2 = \frac{2i+2-2i}{2} = 1$ .

3.  $iz^2 + iz + 1 + i = 0.$

Calculons :

$$\Delta = i^2 - 4.i.(1 + i) = 3 - 4i$$

On cherche  $\delta = a + ib$  tel que  $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \mp 1 \end{cases}$ . Je chosis  $\delta = 2 - i$ .

Il y a donc deux solutions :  $z_1 = \frac{-i-2+i}{2i} = i$  et  $z_2 = \frac{-i+2-i}{2i} = -1 - i$ .

4.  $z^2 - 2^{\theta+1}z\cos(\theta) + 2^{2\theta} = 0$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Calculons :

$$\Delta = (-2^{\theta+1}\cos(\theta))^2 - 4.1.(2^{2\theta}) = 4.2^{2\theta}(\cos^2(\theta) - 1) = 4.2^{2\theta}\sin^2(\theta)$$

Une racine de  $\Delta$  est  $2^{\theta+1}\sin(\theta)$

Il y a donc deux solutions :  $z_1 = \frac{2^{\theta+1}(\cos(\theta) - \sin(\theta))}{2} = 2^{\theta+1}(\cos(\theta) - \sin(\theta))$  et  $z_2 = \frac{2^{\theta+1}(\cos(\theta) + \sin(\theta))}{2} = 2^{\theta+1}(\cos(\theta) + \sin(\theta))$ .

**Exercice 4.5 :****Exercice 4.6 :**

1. Cherchons une solution réelle  $x$  :

$$4ix^3 + 2(1+3i)x^2 - (5+4i)x + 3(1-7i) = 0$$

En Prenant la partie réelle :

$2x^2 - 5x + 3$ , on trouve alors  $x = 1$  ou  $x = \frac{3}{2}$ . Or seul  $\frac{3}{2}$  est racine du polynôme complexe de degré 3.

En factorisant on trouve :

$$4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = (z - \frac{3}{2})(4iz^2 + (2+12i)z - 2+14i)$$

Calculons :

$$\Delta = (2+12i)^2 - 4.4i.(-2+14i) = 4+48i-144+32i+224 = 84+80i$$

On cherche  $\delta = a+ib$  tel que  $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 80 \\ 2ab = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 10 \\ b = \pm 4 \end{cases}$ . Je chosis  $\delta = 10+4i$ .

Il y a donc deux solutions :  $z_1 = \frac{-2-12i-10-4i}{8i} = -2 + \frac{3}{2}i$  et  $z_2 = \frac{-2-12i+10+4i}{8i} = -1 - i$ .

On a donc trouvé 3 solutions  $\{\frac{3}{2}, -2 + \frac{3}{2}i, -1 - i\}$ .

## 5 Géométrie et nombres complexes

**Exercice 5.1 :**

$\text{Arg}(z-2i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$  si et seulement si  $z-2i$  se situe sur la demi droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $\begin{cases} y = x \\ x > 0 \end{cases}$  donc  $z = 2i+d$  avec  $d \in \mathcal{D}$ .

L'ensemble cherché est donc la doite  $\mathcal{D}$  translatée de 2 unités vers le haut.

**Exercice 5.2 :**

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . On appelle  $p$  et  $q$  ses racines carrées. On a  $p = -q$ .

- Le triangle est rectangle en  $z$  si et seulement si (Pythagore)

$$\begin{aligned} |p-q|^2 &= |p-z|^2 + |q-z|^2 \\ \Leftrightarrow |p|^2 + |q|^2 - 2\text{Re}(p\bar{q}) &= |p|^2 + |z|^2 - 2\text{Re}(p\bar{z}) + |q|^2 + |z|^2 - 2\text{Re}(q\bar{z}) \\ \Leftrightarrow -2\text{Re}(p\bar{q}) &= 2|z|^2 - 2\text{Re}(\bar{z}(p+q)) \\ \Leftrightarrow -\text{Re}(p\bar{q}) &= |z|^2 \\ \Leftrightarrow |z| &= |z|^2 \\ \Leftrightarrow |z| &= 0 \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

- Le triangle est rectangle en  $p$  sie t seulement si :

$$\begin{aligned} |z-q|^2 &= |p-z|^2 + |q-p|^2 \\ \Leftrightarrow |z|^2 + |q|^2 - 2\text{Re}(z\bar{q}) &= |p|^2 + |z|^2 - 2\text{Re}(p\bar{z}) + |q|^2 \\ \Leftrightarrow -2\text{Re}(z\bar{q}) &= -2\text{Re}(p\bar{z}) + 4|q|^2 \\ \Leftrightarrow \text{Re}(z\bar{q}) &= \text{Re}(\bar{p}z) - 2|q|^2 \\ \Leftrightarrow \text{Re}(z\bar{q}) &= |q|^2 \\ \Leftrightarrow \text{Re}(q^2\bar{q}) &= |q|^2 \\ \Leftrightarrow |q|^2 \text{Re}(q) &= |q|^2 \\ \Leftrightarrow q = 0 \text{ ou } \text{Re}(q) &= 1 \end{aligned}$$

Le cas rectangle en  $q$  est symétrique

**Exercice 5.3 :**

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que  $a+ib = c+id$  et  $a+c = b+d$ .

1. On a  $a - c = i(d - b)$  et  $a - b = d - c$  donc abcd est un rectangle (parallélogramme+diagonales orthogonales de même longueur)?
2. Le centre du rectangle z vérifie  $(z - a)^4 = (z - b)^4 = (z - c)^4 = (z - d)^4$ .

**Exercice 5.4 :****Exercice 5.5 :****Exercice 5.6 :**

Les nombres  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $z^3$ ,  $z$  et 1 soient alignés si et seulement si :

$z = 1$  ou  $z \neq 1$  et :

$$\frac{z^3 - z}{z - 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z(z^2 - 1)}{z - 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z(z + 1) \in \mathbb{R}$$

En notant  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$y(x + 1) + xy = 0 \Leftrightarrow y(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

On a donc le point 1 (cas batard), et les nombres réels et les nombres complexes dont le points associés du plan sont sur la droite d'équation  $x = -\frac{1}{2}$ .

**Exercice 5.7 :****Exercice 5.8 :**

Reconnaitre et préciser les caractéristiques des applications suivantes  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $k$  et  $l$  définies par :

1.  $f(z) - i = (1 + i)(z - i) \Leftrightarrow f(z) = (1 + i)z + 1$

Le point fixe vérifie  $f(z) = z \Leftrightarrow z = \frac{-1}{i} = i$

La transformation est donc la composée de la rotation de centre  $i$  et d'angle  $\pi/4$  avec l'homothétie de centre  $i$  et de rapport  $\sqrt{2}$ .

2.  $g(z) = (-2 + 2i)z + 5 + i$

Le point fixe vérifie  $g(z) = z \Leftrightarrow z = \frac{5+i}{3-2i} = \frac{(5+i)(3+2i)}{5} = \frac{13+13i}{5}$

La transformation est donc la composée de la rotation de centre  $\frac{13+13i}{5}$  et d'angle  $3\pi/4$  avec l'homothétie de centre  $\frac{13+13i}{5}$  et de rapport  $2\sqrt{2}$ .

3.  $h(z) = \frac{1+i}{1-i}z + 2i = \frac{(1+i)^2}{2}z + 2i = iz + 2i$

Le point fixe vérifie  $h(z) = z \Leftrightarrow z = \frac{-2i}{i} = -2$

La transformation est donc la composée de la rotation de centre  $-2$  et d'angle  $\pi/2$  avec l'homothétie de centre  $-2$  et de rapport 1. C'est donc uniquement la rotation de centre  $-2$  et d'angle  $\pi/2$  ce qui se voyait en écrivant  $h(z) = i(z - (-2))$ .

4.  $k(z) = \frac{2-i}{i+1}z = \frac{(2-i)(1-i)}{2}z = \frac{1-3i}{2}z$

Le point fixe est évidemment 0. La transformation est donc la composée de la rotation de centre 0 et d'angle  $\text{Arctan}(-3)$  avec l'homothétie de centre 0 et de rapport  $\sqrt{10}/2$ .

5.  $l(z) = (-1 + 2i)z + 3 - 4i$

Le point fixe vérifie  $l(z) = z \Leftrightarrow z = \frac{3-4i}{2-2i} = \frac{(3-4i)(2+2i)}{8} = \frac{14-2i}{8} = \frac{7-i}{4}$ .

La transformation est donc la composée de la rotation de centre  $\frac{7-i}{4}$  et d'angle  $\pi - \text{Arctan}(2)$  avec l'homothétie de centre  $\frac{7-i}{4}$  et de rapport  $\sqrt{5}$ .

**Exercice 5.9 :****Exercice 5.10 :**