TD 2 Fonctions usuelles et dérivation

1 Fonctions

Exercice 1.1 :

On se propose de déterminer une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vériant :

$$\forall x \in \mathbb{R}; xf(x) + f(1-x) = x^2 + 2$$

1. Dans cette question on suppose qu'une telle fonction f existe.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) + (1-x)f(1-x) = x^2 - 2x + 3$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $(x^2 - x + 1)f(x) = x^3 + 1$.
   (c) Déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Vérifier que l'application f trouvée convient.

Exercice 1.2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit les fonctions f^+ et f^- par :

$$f^+(x) = \max(f(x); 0) \text{ et } f^-(x) = \max(-f(x); 0).$$

1. Montrer que $\mid f \mid = f^+ + f^-$ et que $f = f^+ - f^-$.
2. Représenter graphiquement f , $\mid f \mid$, f^+ et f^- pour $f(x) = x^2 - 2x$.

Exercice 1.3 :

Soit $f(x) = x^4 - 6x^3 + \frac{21}{2}x^2 - \frac{9}{2}x$. Calculer $f(3-x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 1.4 :

1. Soit $f(x) = x^3 - 3x$.
   (a) Etudier la parité de f.
   (b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Tracer $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
2. Soit $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ montrer que $\mathcal{C}_g$ admet un centre de symétrie.
3. Montrer que $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par une translation que l'on explicitera.

Exercice 1.5 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

- $f \circ f$ est croissante,
- $f \circ f \circ f$est strictement décroissante.

Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 1.6 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(\frac{2x+1}{x+3})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f noté E_f.
2. Etudier la limite de $f(x)$ aux extrémités de E_f.
3. Calculer $f\prime(x)$.
4. Etudier le signe de $f\prime(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
5. Représenter graphiquement f.

Exercice 1.7 :

On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2 \ln(\sqrt{x})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g noté E_g.
2. Etudier la limite de $g(x)$ aux extrémités de E_g.
3. Calculer $g\prime(x)$.
4. Etudier le signe de $g\prime(x)$ et dresser le tableau de variation de g.
5. On prolonge g en 0 en posant $g(0) = 0$. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?
6. Représenter graphiquement g.

Exercice 1.8 :

On considère la fonction h définie par $h(x) = x\sqrt{x}\ln(1 - x^2)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de h noté E_h.
2. Etudier la limite de $h(x)$ aux extrémités de E_h.
3. Calculer $h'(x)$.
4. Montrer que $h'(x) < 0$ sur $]0; 1[$ et dresser le tableau de variation de h.
5. La fonction h est-elle dérivable en 0 ?
6. Représenter graphiquement la fonction h.

Exercice 1.9 :

Dresser le tableau de variations de $x \mapsto \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$.

2 Logarithme, exponentielle et puissances

Exercice 2.1 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 1) + \ln(4) = \ln(4x - 1)$
2. $\ln(\mid x - 1 \mid) + \ln(\mid x + 2 \mid) = \ln(\mid 4x^2 + 3x - 7 \mid)$
3. $2^{x^2} = 3^{x^3}$
4. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
5. $2^{x+1} + 4^x = 15$

6. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
7. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$ (trouver d'abord une solution évidente et montrer que c'est la seule)

Exercice 2.2 :

On pose $f(x) = x^x$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Etudier la limite de f aux bornes de D.
3. Dresser le tableau de variation de f sur D.

Exercice 2.3 :

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ on pose $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer.
2. Expliciter la bijection réciproque de f.

Exercice 2.4 :

Soit $\lambda > 0$. On pose $f(x) = e^{\lambda x}$ et on cherche à résoudre l'équation :

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x \tag{1}$$

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Montrer que x est solution de l'équation (1).
3. Réciproquement, en utilisant les variations de f, montrer que toute solution de l'équation (1) vérifie $f(x) = x$.
4. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
5. En déduire le nombre de solutions de l'équatipon (1) en fonction des valeurs de λ.

Exercice 2.5 :

1. On considère la fonction f dénie par $f(x) = e^{x \ln(x)}$.
   (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Etudier les variations de f.
   (c) La quantité $\frac{f(x)-1}{x}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 0^+?
   (d) Tracer C_f.
2. On considère l'équation (E) : $x^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (a) Montrer que (E) admet deux solutions dans $]0; +\infty[$.
   (b) Résoudre l'équation (E).

3 Fonctions hyperboliques

Exercice 3.1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $5ch(x) - 3sh(x) = 4$
2. $3sh(x) - ch(x) = 1$

Exercice 3.2 :

1. Montrer que $\forall x \geq 0$, $sh(x) \geq x$.
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 3.3 :

On définit $\forall x \in \mathbb{R}$ la fonction f par :

$$f(x) = sh(x)\cos(x).$$

1. Calculer f', f", $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$.
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt$.

Exercice 3.4 :

Montrer que $ch : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty]$ est une bijection dont on explicitera la bijection réciproque.

Exercice 3.5 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2, ch(p) - ch(q) = 2sh(\frac{p+q}{2})sh(\frac{p-q}{2})$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $ch(2(k+1)\alpha) - ch(2k\alpha)$.
3. On pose :

$$S = sh(\alpha) + sh(3\alpha) + ... + sh((2n+1)\alpha) = \sum_{k=0}^{n} sh((2k+1)\alpha)$$

   Calculer $2sh(\alpha) \times S$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $ch(2x) - 1 = 2sh(x)^2$.
5. En déduire que $S = \frac{sh^2((n+1)\alpha)}{sh(\alpha)}$.

4 Fonction circulaires et circulaires réciproques

Exercice 4.1 :

Simplifier $\forall x \in [-1, 1]$, les expressions $\cos(\arcsin(x))$ et $\sin(\arccos(x))$

Exercice 4.2 :

On pose $f(x) = \arcsin(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$.
3. En déduire une simplification de f.

Exercice 4.3 :

On pose $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $D_f \setminus \{-1, 1\}$ et calculer $f'(x)$.
3. En déduire une simplification de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 4.4 :

Préciser l'ensemble de définition et simplifier :

1. $\tan(\arcsin(x))$
2. $\tan(\arccos(x))$
3. $\arccos(x) + \arccos(-x)$
4. $\cos(\arctan(x))$
5. $\sin(\arctan(x))$
6. $\cos^2(\frac{1}{2}\arctan(x))$
7. $\tan(2\arctan(x))$
8. $\cos(4\arctan(x))$

Exercice 4.5 :

On pose $f(x) = \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2}$.
3. En posant $\cos(u) = 1 - x$, en déduire que f admet une limite en 0 et la calculer.

5 Fonction arctan

Exercice 5.1 :

1. Simplifier $\cos^2(\arctan(x))$.
2. En déduire des valeurs simplifiées de $\cos(\arctan(x))$ et de $\sin(\arctan(x))$.

Exercice 5.2 :

Montrer que la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Quelle est sa valeur ?

Exercice 5.3 :

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < x < y$. Calculer
$$\arctan(\frac{x}{y}) + \arctan(\frac{y-x}{x+y}).$$
2. Ecrire $4\arctan(\frac{1}{5})$ comme $\arctan(a)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. Déduire des questions précédentes que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$.

Exercice 5.4 :

Etudier la fonction f définie par :
$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right).$$

Exercice 5.5 :

1. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x-x^2}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{a}{x^2+1} + \frac{b}{x+1}$.
2. En déduire la valeur exacte de :
$$\int_0^1 \frac{x-x^2}{(x^2+1)(x+1)}dx.$$