TD 5 : Systèmes linéaires corrigé

1 Premiers contacts

Exercice 1.1 :

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_3 = 3 \end{cases}$$

On trouve $x_3 = \frac{3}{2}$ puis $x_2 = \frac{5}{2}$ et enfin $x_1 = -1$.

Exercice 1.2 :

On considère le système suivant d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}.$$

1. Il s'agit de l'intersectiond e deux plans non paralleles dans l'espace : c'est donc une droite que l'on peut écrire point (x_0, y_0, z_0)+paramètre t*vecteur directeur (u, v, w) ou encore :

$$\{(x_0 + tu, y_0 + tv, z_0 + tw) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

2. Une solution à ce système est $(0, 0, 1)$ une solution du système homogène est $(1/3, -5/3, 1)$ donc l'ensemble des solutions est :

$$\{(t.\frac{1}{3}, -t\frac{5}{3}, 1 + t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 1.3 :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + 6y + 9z = \lambda \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 0 = \lambda - 9 \end{cases}.$$

Donc si $\lambda \neq 9$ il n'y a pas de solution et si $\lambda = 9$ on a un plan d'équation $x + 2y + 3z = 3$ ou encore

$$(x, y, z) = (3 - 2y - 3z, y, z) = (3, 0, 0) + y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

qui nous donne un point et deux vecteurs "libres" du plan.

Exercice 1.4 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 - x_1 = 1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 - x_2 = 2 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

or la dernière ligne est absurde donc le système est incompatible.

Exercice 1.5 :

On considère le système $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_1 = 1 \end{cases}$.

1. On remarque qu'une solution particulière est $(0, 1, 1)$.

2. Le système homogène associé est $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$ ou encore $(x_1, x_2, x_3) = x_3(1, 1, 1)$ donc l'ensemble des solutions est

$$\{(t, 1 + t, 1 + t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

2 Matrices

Exercice 2.1 :

On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-10}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 8L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2.2 :

On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La premiere matrice donne le système $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ et la deuxième $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ deux matrices equivalentes correspondent a deux systemes equivalents et deux systemes equivalents ont même solution. On en déduit que les deux matrices n'étaient pas équivalentes par ligne.

Exercice 2.3 :

Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & k-1 & -(2k+1) & -1 \\ 0 & 0 & k-2 & k-1 \end{pmatrix}.$$

Pour$k \neq 1$, la matrice est échelonnée par lignes.

Exercice 2.4 :

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Seule A est échelonnée réduite
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3/(-10)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 7L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.5 :

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & -7 & -20 \\ 0 & -20 & -56 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow 7L_3 - 20L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & -7 & -20 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.6 :

Exercice 2.7 :

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.8 :

3 Résolution de systèmes

Exercice 3.1 :

L'intersection des trois plans d'équations :

$$2x + y - 2z = 1,\ -2x - 2y + 3z = 1 \text{ et } 3x - y - 2z = 5.$$

est :

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ -2x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - y - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & 2 \\ & - & 5y & + & 2z & = & 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & 2 \\ & & & - & 3z & = & -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 2 \\ & & y & & & = & -1 \\ & & & & z & = & 1 \end{array} \right.$$

L'intersection des 3 plans est donc le point de coordonnées $(2, -1, 1)$.

Exercice 3.2 :

L'intersection des trois plans d'équations :

$$2x + 2y - z = 1,\ x - y + 2z = 1 \text{ et } 7x + y + 4z = 4 \text{ est}$$

$$\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x-y+2z=1 \\ 7x+y+4z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ 0-2y+2.5z=0.5 \\ 0-12y+15z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ 0-2y+2.5z=0.5 \\ 0-0+0=-2 \end{cases}$$

Le système est incompatible : les 3 plans ne s'intersectent pas.

Pour les deux premiers :

$$\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x-y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ 0-2y+2.5z=0.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -0.75 \\ 1.25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc d'une droite.

Exercice 3.3 :

Résolvons :

$$\begin{cases} x - 3y + 2z + t = -2 \\ 2x + 4y + z + 2t = 4 \\ 7x + 9y + 5z + 7t = 10 \\ -4x - 18y + z - 4t = -16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z + t = -2 \\ 10y - 3z = 8 \\ 30y - 9z = 24 \\ -30y + 9z = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z + t = -2 \\ 10y - 3z = 8 \\ 30y - 9z = 24 \\ -30y + 9z = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z + \\ y - 0.3z \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.4 :

Résolvons :

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y + 3z = -1 \\ 2y - z = 1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y + 3z = -1 \\ 2y - z = 1 \\ -y - 1.5z = -6.5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y + 3z = -1 \\ 2y - z = 1 \\ -2z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.5 :

Résolvons :

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ +3y - 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ -2z = 0 \\ -5z = -2 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes permettent de voir que le système est incomaptible.

4 Systèmes avec paramètres

Exercice 4.1 :

Résolvons le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & aby & + & z & = & b \\ ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & aby & + & z & = & b \\ & & b(1-a^2)y & + & (1-a)z & = & 1-ab \\ & + & b(1-a)y & + & (a-1)z & = & 1-b \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & aby & + & z & = & b \\ & + & b(1-a)y & + & (a-1)z & = & 1-b \\ & & b(1-a^2)y & + & (1-a)z & = & 1-ab \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3-(1+a)L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & aby & + & z & = & b \\ & + & b(1-a)y & + & (a-1)z & = & 1-b \\ & & & & (-a^2-a+2)z & = & b-a \end{array}\right.$$

Or $-a^2-a+2 = -(a-1)(a+2)$

- Si $a = 1$

La derniere ligne du système devient $b-1=0$ donc si $b \neq 1$ il n'y a pas de solutions et si $b=1$ on a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est le plan d'équation $x+y+z=1$

- Si $a = -2$

La derniere ligne du système devient $b+2=0$ donc si $b \neq -2$ il n'y a pas de solutions et si $b=-2$ on a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & z & = & -2 \\ & - & 6y & - & 3z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions est une droite.

- Sinon on a une unique solution :

$z = \frac{b-a}{-a^2-a+2}$, $y = \frac{1-b-(a-1)z}{b(1-a)} = \frac{1-b+\frac{b-a}{a+2}}{b(1-a)} = \frac{a-ab+2-2b+b-a}{b(1-a)(a+2)} = \frac{-ab+2-b}{b(1-a)(a+2)}$

et $x = b-z-aby = b - \frac{b-a}{-a^2-a+2} - \frac{-a^2b+2a-ab}{(1-a)(a+2)} = \frac{-a^2b-ab+2b-b+a+a^2b-2a+ab}{(1-a)(a+2)} = \frac{b-a}{(1-a)(a+2)}$

Exercice 4.2 :

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tous distincts. Résolvons :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & a^3 \\ x & + & by & + & b^2z & = & b^3 \\ x & + & cy & + & c^2z & = & c^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & a^3 \\ & & (b-a)y & + & (b^2-a^2)z & = & b^3-a^3 \\ & & (c-a)y & + & (c^2-a^2)z & = & c^3-a^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = \\ & & y & + & (b+a)z & = \\ & & y & + & (c+a)z & = \end{array}\right.$$

J'utilise l'égalité $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & a^3 \\ & & y & + & (b+a)z & = & b^2+ab+a^2 \\ & & & & (c-b)z & = & c^2+a(c-b)-b^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & abc \\ & & y & + & (b+a)z & = & -bc-ac-ab \\ & & & & z & = & a+b+c \end{array}\right.$$

Exercice 4.3 :

Exercice 4.4 :

Discuter, en fonction du paramètre m, le nombre de solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} mx & + & y & = & 1 \\ x & + & my & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & my & = & 1 \\ & & (1-m^2)y & = & 1-m \end{array}\right. .$$

Si $m \neq \pm 1$ alors il y a une unique solution sinon l'ensemble des solutions est une droite du plan.

Exercice 4.5 :

Résoudre suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (2+t)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & (t-1)y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & (2+t)z & = & 0 \end{array}\right. .$$

<u>Exercice 4.6 :</u>

Résoudre suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & my & + & m^2z & + & m^3t & = & 1 \\ mx & + & m^2y & + & m^3z & + & t & = & 1 \\ m^2x & + & m^3y & + & z & + & mt & = & 1 \\ m^3x & + & y & + & mz & + & m^2t & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & my & + & m^2z & + & m^3t & = & 1 \\ & & & & & + & (1-m^4)t & = & 1-m \\ & & & & (1-m^4)z & + & (m-m^5)t & = & 1-m^2 \\ & & (1-m^4)y & + & (m-m^5)z & + & (m^2-m^6)t & = & 1-m^3 \end{array}\right. .$$

- Si $m = 0$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & & = 1 \\ & & & t & = 1 \\ & & z & & = 1 \\ & y & & & = 1 \end{array}\right.$$

- Si $m = 1$

$$\left\{ x + y + z + t = 1 \right.$$

- Si $m = -1$

$$\left\{ x - y + z - t = 1 \right.$$

- Sinon

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & my & + & m^2z & + & m^3t & = & 1 \\ & & & & & + & t & = & \frac{1-m}{1-m^4} = \frac{1}{(1+m)(1+m^2)} \\ & & & & & & & = & \frac{1-m}{1-m^4} = \frac{1}{(1+m)(1+m^2)} \\ & & y & & & & & = & \frac{1-m}{1-m^4} = \frac{1}{(1+m)(1+m^2)} \end{array}\right.$$