TD 6 : Réels et suites

1 Ensemble des nombres réels

Exercice 1.1 :

L'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$$

admet-il une borne supérieure ? Si oui quelle est elle ?

Exercice 1.2 :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie ayant un plus grand élément $a \in A$. Montrer que $a = \sup(A)$.

Exercice 1.3 :

On considère la partie $X = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 \leq 2\}$.

1. Montrer que X admet une borne supérieure que l'on notera a.
2. Dans cette quetion on suppose que $a^2 < 2$.
   (a) Vérifier que $\forall h \in [0,1]$, $(a+h)^2 \leq a^2 + 2ah + h$.
   (b) On pose désormais $h = \min(1, \frac{2-a^2}{2a+1})$. Montrer que $a + h \in X$.
   (c) En déduire une contradiction.
3. On suppose maintenant que $a^2 > 2$.
   (a) Vérifier que $\forall h \in \mathbb{R}$, $(a-h)^2 \geq a^2 - 2ah$.
   (b) On pose désormais $h = \min(a, \frac{a^2-2}{2a})$. Aboutir a une contradiction comme dans la question précédente.
4. Conclure

Exercice 1.4 :

1. Quelle est la borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que si $a \in \mathbb{R}$ vérifie $\forall \epsilon > 0$, $\mid a \mid \leq \epsilon$ alors $a = 0$.

Exercice 1.5 :

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ majorées. On définit $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 1.6 :

Montrer que la fonction $\lfloor \quad \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

Exercice 1.7 :

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

Exercice 1.8 :

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. A-t-on toujours $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Exercice 1.9 :

1. Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ prend uniquement les valeurs 0 et 1.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

2 Suites définitions

Exercice 2.1 :

1. Montrer que la sommes de deux suites majorées est majorée.
2. Montrer que la sommes de deux suites bornées est bornée.

Exercice 2.2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On pose $u_n = f(n)$.

1. Montrer que si f est monotone alors (u_n) aussi.
2. Que dire de la réciproque ?

3 Limites de suites

Exercice 3.1 :

Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. Montrer qu'à partir d'un certain rang $\mid u_n^2 \mid \leq \mid u_n \mid$.

Exercice 3.2 :

Soient (u_n) une suite convergente. Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$.

Exercice 3.3 :

Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

Exercice 3.4 :

Trouver deux suites divergentes dont la somme et le produit sont des suites convergentes.

Exercice 3.5 :

Déterminer la limite de la suite $((\frac{1}{n} - 1)n^2)$.

Exercice 3.6 :

Déterminer la limite de la suite $((\frac{1}{n} + 1)^2 - n^2)$.

Exercice 3.7 :

Etudier la convergence de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2n^2 - \sin(n)}{\cos(n) - 3n^2}.$$

Exercice 3.8 :

Grâce à un encadrement, étudier la limite de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}.$$

Exercice 3.9 :

Soit (u_n) une suite bornée.

1. Montrer que l'on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup\{u_k \mid k \geq n\}$ et $w_n = \inf\{u_k \mid k \geq n\}$.
2. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.

3. Montrer que (u_n) est convergente si et seulement si $\lim v_n = \lim w_n$.

Exercice 3.10 :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mid \sin(x) - x \mid \leq \frac{x^2}{2}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n^2})$.

Exercice 3.11 :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $ch(x) = \frac{sh(2x)}{2sh(x)}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} ch(\frac{x}{2^k})$.

4 Limites théoriques

Exercice 4.1 :

Soit u la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.
2. En déduire que (u_n) est majorée par 3.
3. En déduire la convergence de (u_n).

Exercice 4.2 :

Démontrer que les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes et donc convergentes.

Exercice 4.3 :

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Elles convergent vers le nombre d'Euler e.
2. On suppose que $e \in \mathbb{Q}$. On écrit donc $e = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers supérieurs à 1.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$.
   (b) Montrer que le nombre $q!(e - u_q)$ est entier.
   (c) Déduire que e est irrationnel.

Exercice 4.4 :

On considère les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. En déduire la convergence de (u_n).

Exercice 4.5 :

Montrer qu'une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 4.6 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 2 \\ 0 \leq v_n \leq 3 \end{cases}$ et $\lim u_n v_n = 6$. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Exercice 4.7 :

Soit (u_n) une suite croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} - u_n \leq \frac{1}{n}$. Montrer que la suite est convergente.

Exercice 4.8 :

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $b_0 > a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \tfrac{a_n + b_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite.

Exercice 4.9 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{n}}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq 1 + \sqrt{2} u_n$.
2. En déduire que (u_n) est convergente.

5 Suites complexes

Exercice 5.1 :

Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$ tend vers 0.

Exercice 5.2 :

Etudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = (1 + \frac{1}{2^n}) + (2 + \frac{1}{n})i.$$

Exercice 5.3 :

Etudier la convergence de la suite définie par :

$$u_n = 1 + ni.$$

Exercice 5.4 :

Soit $a \in \mathbb{C}$. Etudier selon la valeur de $\mid a \mid$ la convergence de la suite (a^n).

Exercice 5.5 :

Etudier la convergence de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \exp(ni\frac{\pi}{2}).$$

Exercice 5.6 :

Etudier la suite complexe définie par $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

6 Suites récurrentes

Exercice 6.1 :

Justifier l'existence et l'unicité d'une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exercice 6.2 :

Est-il correct de définir une suite par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exercice 6.3 :

Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 0 & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Donner son terme général en fonction de n.

Exercice 6.4 :

Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 0 & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Donner son terme général en fonction de n.

Exercice 6.5 :

Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 0 & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Donner son terme général en fonction de n.

Exercice 6.6 :

Dans les deux cas, déterminer une expression de la suite définie par :

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n + 3$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $u_1 = -1$, $u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

Exercice 6.7 :

Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} 0 < u_0, u_1 < 1 \\ u_{n+2} = \frac{\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}}{2} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \min(u_n, u_{n+1})$.
   (a) Montrer que (v_n) est croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$.
   (c) Montrer que $\lim u_n = 1$.

Exercice 6.8 :

On définit $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2 + u_n}.$$

1. Chercher les réels l_1 et l_2 tels que $f(l_i) = l_i$ où f désigne la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Etudier la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$.
3. Etudier la convergence de (u_n).

Exercice 6.9 :

On définit $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{-1 + u_n}{3 + u_n}.$$

1. Chercher le réels l tels que $f(l) = l$ où f désigne la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Etudier la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n - l}$.
3. Etudier la convergence de (u_n).

Exercice 6.10 :

Etudier la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.