# TD 6 : Réels et suites correction

## 1 Ensemble des nombres réels

**Exercice 1.1 :**

L'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$$

est inclus dans $\mathbb{R}$ non vide et majoré par $\sqrt{2}$, il a donc une borne supérieure. La suite $(\frac{\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor}{10^n})$ est dans sla partie et tend vers $\sqrt{2}$. La borne sup est donc $\sqrt{2}$.

**Exercice 1.2 :**

**Exercice 1.3 :**

On considère la partie $X = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 \leq 2\}$.

1. $X$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par $\sqrt{2}$. Elle admet donc une borne supérieure.
2. Dans cette quetion on suppose que $a^2 < 2$.
   (a) $\forall h \in [0,1]$, $(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 \leq a^2 + 2ah + h$. car $h \leq 1$
   (b) On pose désormais $h = \min(1, \frac{2-a^2}{2a+1})$. Calculons
   $(a+h)^2 \leq a^2 + 2ah + h = a^2 + h(2a+1) \leq a^2 + 2 - a^2 = 2$.
   Donc $a + h \in X$
   (c) Au vu de ce qui est supposé sur $a$ on a $a + h > a$ ce qui empeche $a$ d'etre un majorant de $X$.
3. On suppose maintenant que $a^2 > 2$.
   (a) $\forall h \in \mathbb{R}$, $(a-h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 \geq a^2 - 2ah$.
   (b) On pose désormais $h = \min(a, \frac{a^2-2}{2a})$.Calculons :
   $(a-h)^2 \geq a^2 - 2ah \geq a^2 - (a^2 - 2) = 2$
   Donc $a - h \notin X$ et $0 < a - h < a$ ce qui est impossible car $a^2 \leq 2$ (en prenant une suite d'éléments de $X$ qui tend vers $a$)
4. Ainsi $a = 2$.

**Exercice 1.4 :**

**Exercice 1.5 :**

Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$ majorées. On définit $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

$A + B$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et $\forall x \in A + B$, $x \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Ainsi $\sup(A+B)$ existe et de plus comme la borne sup est le plus petit des majorants, $\sup(A+B) \leq \sup(A)+\sup(B)$.

Soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $A$ qui tend vers $\sup(A)$ et $(b_n)$ une suite d'éléments de $B$ qui tend vers $\sup(B)$ alors $(a_n + b_n)$ est une suite d'éléments de $A + B$ qui tend vers $\sup(A) + \sup(B)$.

**Exercice 1.6 :**

**Exercice 1.7 :**

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + p\rfloor = \lfloor x\rfloor + p$ :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

On a $\lfloor x \rfloor + p \leq x + p < \lfloor x \rfloor + p + 1$. On a coincé $x$ entre deux entiers consécutifs donc on connait le plus grand entier inférieur à $x+p$ et $\lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

**Exercice 1.8 :**

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. A-t-on toujours $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ?

Non $x = y = 1.5$ est un contre exemple.

**Exercice 1.9 :**

## 2 Suites définitions

**Exercice 2.1 :**

1. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq M_2$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n \leq M_1 + M_2$.
2. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mid u_n \mid \leq M_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mid v_n \mid \leq M_2$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \mid u_n + v_n \mid \leq \mid u_n \mid + \mid v_n \mid \leq M_1 + M_2$.

**Exercice 2.2 :**

## 3 Limites de suites

**Exercice 3.1 :**

Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers 0. Montrer qu'à partir d'un certain rang $\mid u_n^2 \mid \leq \mid u_n \mid$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \mid u_n \mid \leq 1$ alors $\forall n \geq N, \mid u_n \mid^2 \leq \mid u_n \mid$.

**Exercice 3.2 :**

Soient $(u_n)$ une suite convergente. Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$.

Si $u_n \to l$ alors $u_{n+1} - u_n \to l - l = 0$.

**Exercice 3.3 :**

Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

Si $u_n \to l$ et $v_n$ diverge alors par l'absurde si $u_n + v_n \to l_2$, on aurait $v_n = (u_n + v_n) - u_n \to l_2 - l :$ c'est absurde.

**Exercice 3.4 :**

Trouver deux suites divergentes dont la somme et le produit sont des suites convergentes.

Posons $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$, ces suites divergent. On a $u_n + v_n = 0$ et $u_n v_n = -1$ qui sont constantes donc convergentes.

**Exercice 3.5 :**

Déterminer la limite de la suite $((\frac{1}{n} - 1)n^2)$.

C'est $-\infty$

**Exercice 3.6 :**

Déterminer la limite de la suite $((\frac{1}{n} + 1)^2 - n^2)$.

C'est $-\infty$

**Exercice 3.7 :**

Etudier la convergence de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2n^2 - \sin(n)}{\cos(n) - 3n^2}.$$

On a $u_n = \frac{2n^2\left(1-\frac{\sin(n)}{2n^2}\right)}{-3n^2\left(\frac{\cos(n)}{-3n^2}+1\right)} = \frac{2\left(1-\frac{\sin(n)}{2n^2}\right)}{-3\left(\frac{\cos(n)}{-3n^2}+1\right)} \to \frac{-2}{3}$.

**Exercice 3.8 :**

Grâce à un encadrement, étudier la limite de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}.$$

On a $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$.

Ainsi $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} \Leftrightarrow \frac{n^2}{n^2\sqrt{1+\frac{n}{n^4}}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}$ et donc $u_n$ tend vers 1 par le théorème des gendarmes.

**Exercice 3.9 :**

Soit $(u_n)$ une suite bornée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,$\{u_k \mid k \geq n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide car $u_n$ est dedans. De plus cette partie ne contient que des valeurs de la suite bornée donc la partie est majorée et minorée. Il est donc légitime de poser $v_n = \sup\{u_k \mid k \geq n\}$ et $w_n = \inf\{u_k \mid k \geq n\}$.

2. Comme $\{u_k \mid k \geq n\} \supset \{u_k \mid k \geq n+1\}$ on voit que $(v_n)$ est décroissante et que $(w_n)$ est croissante. de plus les suites étant bornées par les mêmes bornes que pour $(u_n)$ elles sont convergentes

3. Préliminaire : on voit que $w_n \leq u_n \leq v_n$ donc si $\lim v_n = \lim w_n$, par théorème des gendarmes, $u_n$ converge. Réciproquement si $(u_n)$ converge, alors $\lim w \leq \lim u \leq \lim v$. Par l'absurde si $\lim u > \lim w$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$tel que $\forall n \geq N, u_n > \frac{\lim u + \lim w}{2}$ ainsi $\forall n \geq N, w_n \geq \frac{\lim u+\lim w}{2}$ et par conséquent $\lim w \geq \frac{\lim u + \lim w}{2} \Leftrightarrow \lim w \geq \lim u$ c'est absurde. Ainsi $\lim u = \lim w$. On montre de même $\lim u = \lim v$

**Exercice 3.10 :**

**Exercice 3.11 :**

# 4 Limites théoriques

**Exercice 4.1 :**

Soit $u$ la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Par récurrence : $\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$ de plus si $k \geq 1$ et $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ alors $\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2}$

2. Ainsi $u_n \leq 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \leq 1 + 2 \times 1 = 3$

3. La suite $(u_n)$ est croissante majorée et donc converge.

**Exercice 4.2 :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Il est clair que $(u_n)$ est croissante de plus $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-n-1}{(n+1)!} \leq 0$ donc $(v_n)$ est décroissante. De plus $u_n \leq v_n$ et $u_n - v_n = -\frac{1}{n!}$ tend vers 0 donc les deux suites sont adjacentes et donc elles convergent.

**Exercice 4.3 :**

**Exercice 4.4 :**

On considère les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. On a $w_n = v_n - \frac{1}{2n+2}$ donc on a déjà que $w_n \leq v_n$ et que $w_n - v_n \to 0$. Calculons

$$v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$$

   Ainsi $(v_n)$ est décroissante. De même $(w_n)$ est croissante et les deux suites sont adjacentes.

2. Un résultat du cours assure que si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers la même limite alors $(u_n)$ aussi.

**Exercice 4.5 :**

**Exercice 4.6 :**

**Exercice 4.7 :**

Soit $(u_n)$ une suite croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} - u_n \leq \frac{1}{n}$. Montrons que la suite est convergente.

Posons $v_n = u_{2^n}$. On a alors (en remplaçant $n$ par $2^k$ dans la relation qui nous est donnée)

$v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2^k}$ en faisant la somme pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ :

$v_n - v_0 \leq \sum_{k \in [\![0,n-1]\!]} \frac{1}{2^k} \leq 2$ ainsi $(v_n)$ est croissante majorée et donc $(v_n)$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $k_n$ un entier tel que $2^{k_n} \leq n < 2^{k_n+1}$ mais comme $(u_n)$ est croissante :

$v_{k_n} \leq u_n \leq v_{k_n+1}$

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ et par théorème des gendarmes, $(u_n)$ tend aussi vers la même limite que $(v_n)$.

**Exercice 4.8 :**

On définit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par $b_0 > a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite.

On va utiliser l'inégalité $\mid xy \mid \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a_n}\sqrt{b_n} \leq \frac{a_n+b_n}{2}$.

Ainsi $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Grace à cette inégalité $(a_n)$ est croissante et $(b_n)$ est décroissante. Donc $b_n$ est décroisssante minorée par 0 et donc elle converge vers une limite qu'on notera $l$. Mais alors on a $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \Leftrightarrow a_n = 2b_{n+1} - b_n$ donc $(a_n)$ converge aussi vers $l$.

**Exercice 4.9 :**

# 5 Suites complexes

**Exercice 5.1 :**

Montrons que la suite de terme général $u_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$ tend vers 0.

Son module est $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ qui tend vers 0.

**Exercice 5.2 :**

Etudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = (1 + \frac{1}{2^n}) + (2 + \frac{1}{n})i.$$

Il est clair (en regardant partie reelle et imaginaire) que la suite tend vers $1 + 2i$.

**Exercice 5.3 :**

Etudier la convergence de la suite définie par :

$$u_n = 1 + ni.$$

Son module tend vers $+\infty$ donc la suite diverge.

**Exercice 5.4 :**

Soit $a \in \mathbb{C}$. Etudier selon la valeur de $\mid a \mid$ la convergence de la suite $(a^n)$.

Si $\mid a \mid< 1$ la suite converge vers 0.

Si $\mid a \mid> 1$ le module tend vers l'infini et la suite diverge.

Si $\mid a \mid= 1$ la suite est de la forme $e^{in\theta}$ qui ne converge que si $n \equiv 0[2\pi]$.

**Exercice 5.5 :**

Etudier la convergence de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \exp(ni\frac{\pi}{2}).$$

On a $u_{2n} = (-1)^n$. Cette sous suite ne converge pas donc la suite $u$ ne peut pas converger.

**Exercice 5.6 :**

# 6 Suites récurrentes

**Exercice 6.1 :**

Justifier l'existence et l'unicité d'une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

On vérifie facilement que $u_n > 0$. C'est vrai pour $u_0$ et $u_{n+1} = \ln(x_n)$ avec $x_n > 1$.

**Exercice 6.2 :**

Est-il correct de définir une suite par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

NON $u_1 = \ln(2) < 1$ puis $u_2 = \ln(\ln 2)) < 0$ et il est imposible de calculer $u_3$.

**Exercice 6.3 :**

Soit $(u_n)$ une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 0 & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

L'équation caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = 0$ dont la seule racine est 1.

Ainsi $u_n$ est de la forme $1^n(A + Bn)$ et les conditions sur $u_0$ et $u_1$ impliquent que $u_n = n$.

**Exercice 6.4 :**

Soit $(u_n)$ une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 0 & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

L'équation caractéristique est $X^2 - 2X - 1 = 0$ dont les racines sont $1 \pm \sqrt{2}$.

Ainsi $u_n$ est de la forme $(A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n)$ et les conditions sur $u_0$ et $u_1$ impliquent que $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ et $u_n = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n$

**Exercice 6.5 :**

Soit $(u_n)$ une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 0 & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

L'équation caractéristique est $X^2 - 2X + 2 = 0$ dont les racines sont $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$.

Ainsi $u_n$ est de la forme $\sqrt{2}^n(A\cos(\frac{\pi n}{4}) + B\sin(\frac{\pi n}{4}))$ et les conditions sur $u_0$ et $u_1$ impliquent que $\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$ et $u_n = \sqrt{2}^n \sin(\frac{\pi n}{4})$.

**Exercice 6.6 :**

Dans les deux cas, déterminer une expression de la suite définie par :

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n + 3$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $u_1 = -1$, $u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

**Exercice 6.7 :**

Soit $(u_n)$ une suite définie par $\begin{cases} 0 < u_0, u_1 < 1 \\ u_{n+2} = \frac{\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}}{2} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in ]0, 1[$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \min(u_n, u_{n+1})$.
   (a) Montrer que $(v_n)$ est croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$.
   (c) Montrer que $\lim u_n = 1$.

**Exercice 6.8 :**

On définit $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2 + u_n}.$$

1. Chercher les réels $l_1$ et $l_2$ tels que $f(l_i) = l_i$ où $f$ désigne la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Etudier la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$.
3. Etudier la convergence de $(u_n)$.

**Exercice 6.9 :**

On définit $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = \frac{-1 + u_n}{3 + u_n}.$$

1. Chercher le réels $l$ tels que $f(l) = l$ où $f$ désigne la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Etudier la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n - l}$.
3. Etudier la convergence de $(u_n)$.

**Exercice 6.10 :**

Etudier la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.