TD 7 : $\mathbb{C}$ontinuité corrigé

1 Limites

Exercice 1.1 :

On a $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\lfloor\frac{1}{\sqrt{x}}\rfloor \leq \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\lfloor\frac{1}{\sqrt{x}}\rfloor = 1$ par théorème des gendarmes

Exercice 1.2 :

On a $\sqrt{x^2+1}-x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x = 0$.

Exercice 1.3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A > 0$. On pose $B = A^{1/n}$ alors $\forall x > B, x^n > A$.

Ainsi $\forall n \in N^*$, $x^n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 1.4 :

On sait que sin est bornée et ln tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 1.5 :

On a $\underbrace{e^x}_{\underset{x\to+\infty}{\to+\infty}}\underbrace{(x+1-\lfloor x\rfloor)}_{\geq 1}$donc la limite cherchée existe et est $+\infty$.

Exercice 1.6 :

Pour tout $x \geq 1$, on définit $f(x) = \int\limits_x^{2x}\frac{dt}{t+\sqrt{t}}$.

1. Soit $x > 0$. On a $\int\limits_x^{2x}\frac{dt}{t} = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$.
2. On a $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}}{t(t+\sqrt{t})} \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2}$. Ainsi $0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$.
3. On a alors
$$\begin{aligned} \mid \ln(2) - f(x) \mid &= \mid \int\limits_x^{2x}\frac{dt}{t} - \int\limits_x^{2x}\frac{dt}{t+\sqrt{t}} \mid \\ &= \mid \int\limits_x^{2x}\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}}dt \mid \\ &= \int\limits_x^{2x}\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}}dt \\ &\leq \int\limits_x^{2x}\frac{1}{t^{3/2}}dt \\ &= [-2t^{-1/2}]_x^{2x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{2x}} \end{aligned}$$
.
4. Or $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

Exercice 1.7 :

Etudier les limites suivantes :

1. On a $x(e^{1/x}+e^{2/x}-2)=\frac{e^{1/x}-1}{1/x}+2.\frac{e^{2/x}-1}{2/x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}3$

2. $\frac{\sin(\frac{1}{x})}{e^{1/x}+1}$: le numérateur est borné mais n'a pas de limite en 0 tandis que le dénominateur tend vers 1 en 0^- et vers plus l'infini en 0^+.Ainsi la limite est 0 en 0^+ et n'existe pas en 0^-.

3. $(1-x^2)\tan(\frac{\pi}{2}x)$: on pose $u=x-1$ pour fairer tendre u vers 0.

$$\begin{array}{rcl}(1-x^2)\tan(\frac{\pi}{2}x) & = & (-2u-u^2)\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}u)\\ & = & (-2u-u^2)\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}u)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}u)}\\ & = & (2u+u^2)\frac{\cos(\frac{\pi}{2}u)}{\sin(\frac{\pi}{2}u)}\\ & = & \cos(\frac{\pi}{2}u)(2+u)\frac{2}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2}u}{\sin(\frac{\pi}{2}u)}\end{array}$$

Ainsi la limite cherchée est $\frac{4}{\pi}$.

4. $$\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}=\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}.\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1}}.\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x-4}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x-4}}=\underbrace{\underbrace{\frac{x(x-2)}{-(x-2)(x+3)}}_{\underset{x\to2}{\longrightarrow}\frac{-2}{5}}.\underbrace{\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x-4}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1}}}_{\underset{x\to2}{\longrightarrow}\frac{2}{\sqrt{3}}}}_{\underset{x\to2}{\longrightarrow}\frac{-4}{5\sqrt{3}}}.$$

5. $\frac{\sqrt{2+x^2}-1}{\ln(x)}=\frac{x}{\ln(x)}\left(\sqrt{\frac{2}{x^2}+1}-\frac{1}{x}\right)$ donc la limite en $+\infty$ est $+\infty$ par croissance comparée.

6. $\underbrace{\sin(\frac{1}{x})}_{\to0}\underbrace{e^{\cos(x)}}_{\text{borné}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x^2}{\sin^2(x)}=+\infty$

8. $$\begin{array}{rcl}\tan(x)\tan(2x) & \underset{u=x-\frac{\pi}{2}}{=} & \tan(u+\frac{\pi}{2})\tan(2u+\pi)\\ & = & -\frac{\cos(u)}{\sin(u)}.\frac{\sin(2u)}{\cos(2u)}\\ & = & -\frac{\sin 2u}{2u}.2.\frac{u}{\sin u}.\frac{\cos u}{\cos 2u}\end{array}$$ ainsi la limite cherchée est -2

9. $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0$

10. $$\begin{array}{rcl}\frac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{3}} & \underset{u=x-\frac{\pi}{3}}{=} & \frac{\sqrt{3}\cos(u+\frac{\pi}{3})-\sin(u+\frac{\pi}{3})}{u}\\ & = & \frac{\sqrt{3}(\cos(u)\frac{1}{2}-\sin(u)\frac{\sqrt{3}}{2})-\sin u\frac{1}{2}-\cos(u)\frac{\sqrt{3}}{2}}{u}\\ & = & \frac{-2\sin u}{u}\end{array}$$ et la limite cherchée est -2

11. $$\begin{array}{rcl}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} & = & \frac{\sin(x)\left(\frac{1}{\cos(x)}-1\right)}{x^3}\\ & = & \frac{\sin(x)}{x}\frac{\left(\frac{1}{\cos(x)}-1\right)}{x^2}\\ & = & \frac{\sin(x)}{x}\frac{(1-\cos(x))}{\cos(x)x^2}\\ & = & \frac{\sin(x)}{x}.\frac{1}{\cos(x)}.\frac{\cos(0)-\cos(x)}{x^2}\\ & = & \frac{\sin(x)}{x}.\frac{1}{\cos(x)}.\frac{-2\sin(\frac{x}{2})\sin(\frac{-x}{2})}{x^2}\\ & = & \frac{\sin(x)}{x}.\frac{1}{\cos(x)}.2.\frac{1}{4}.\frac{\sin(\frac{x}{2})}{x/2}.\frac{\sin(\frac{x}{2})}{x/2}\end{array}$$ ainsi la limite en 0 est $\frac{1}{2}$.

12. $\lim\limits_{x\to0}x\sin(\frac{1}{x})=0$ car c'est un produit d'une fonction bornée et d'une qui tend vers 0.

Exercice 1.8 :

Soient $x,y\in\mathbb{R}$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(x+nT)=f(x)$ et $f(y+nT)=f(y)$ mais les suites $(f(x+nT))$ et $(f(y+nT))$ tendent vers l et sont constantes donc $f(x)=f(y)=l$.

2 Continuité

Exercice 2.1 :

Les fonctions vérifiant :

$$\exists \eta > 0 : \forall \epsilon > 0, \forall x \in I, \mid x - a \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - l \mid \leq \epsilon.$$

sont constantes au voisinagle de a, en effet sur $]a-\eta, a+\eta[$ on $\mid f(x) - l \mid \leq \frac{1}{n}$ pour tout n donc en faisant tendre n vers l'infini $f(x) = l$

Exercice 2.2 :

On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ sh(x) & \text{sinon} \end{cases}$.

Elle est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ car coincide avec des fonctions de référence. De plus

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

donc la fonction est continue en 0.

Exercice 2.3 :

Exercice 2.4 :

Exercice 2.5 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est continue en 0. En effet $e^{\frac{-1}{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 = f(0)$.

Exercice 2.6 :

Montrer que l'équation $\exp(-x) = x^2$ admet au moins une racine réelle.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} - x^2$ la limite de g en $-\infty$ est $+\infty$ et la limite de g en $+\infty$ et $-\infty$. Comme la fonction g est continue, on peut en déduire qu'elle s'annule donc l'équation $\exp(-x) = x^2$ admet au moins une racine réelle.

Exercice 2.7 :

Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions définies par les expressions suivantes, préciser en plus le comportement aux bornes.

1. $f(x) = \frac{x \ln(x)}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ sa limite en 0 est 0 (croissance comparée) et en $+\infty$ c'est $+\infty$. Or

   $$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1$$

   La limite en 1 est donc 1.

2. $g(x) = \exp(\frac{\ln(x)}{\ln(x)-1})$ est définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$. La limite en 0 ou $+\infty$ est e (factoriser par le gros). La limite en e^+ est $+\infty$ et la limite en e^- est 0.

3. $h(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. La limite en $-\infty$ est $+\infty$ et la limite en $+\infty$ est 0. De plus

   $$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{\frac{e^x - e^0}{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{e^0} = 1$$

   Donc la limite en 0 est 1.

4. $i(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = e^{x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)}$ est définie sur $]1,+\infty[$. Ecrivons :

$$e^{x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)} = e^{x\ln(x)\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}\right)}$$

En posant $u = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}$ on a

$$i(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\frac{\ln(1+u)}{u}\right) \underset{x\to+\infty}{\overset{u\to 0}{\longrightarrow}} e$$

De plus $e^{x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)} = e^{\overbrace{x\ln(x)\ln(\ln(1+x))}^{\underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0}-x\ln(x)\ln(\ln(x))}$. En posant $u = \ln(x)$, comme $u\ln(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$ alors $x\ln(x)\ln(\ln(x)) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ et donc $i(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 2.8 :

Exercice 2.9 :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

FAIRE UN DESSIN !

Il existe $B > 0$ tel que $\forall x > B, l-1 < f(x) < l+1$. De plus sur $[0,B]$, la fonction f est bornée et atteint ses bornes donc $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in [0,B], m \leq f(x) \leq M$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \min(m, l-1) \leq f(x) \leq \max(M, l+1)$.

Exercice 2.10 :

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2}{1+x}$.

1. f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{2x^2+4x}{(1+x)^2} > 0$ donc $f$est strictement croissante et est continue, c'est don une bijection sut $[f(1), \lim\limits_{+\infty}(f(x)] = [1,+\infty]$

2. f^{-1} est croissante comme f et a donc le même tableau de variation.

Exercice 2.11 :

Exercice 2.12 :

Exercice 2.13 :

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On a $f(0+0) = 2f(0) = f(0)$ donc$f(0) = 0$.

On a $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2a$ puis par récurrence immédiate $f(n) = na$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$f(n-n) = f(0) = 0 = f(n) + f(-n)$ donc $f(-n) = -f(n)$ et donc $f(n) = na$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

$f(1) = f(\frac{p}{p}) = pf(\frac{1}{p})$ donc $f(\frac{1}{p}) = \frac{a}{p}$ et donc $f(\frac{p}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q}a$.

Si f est continue soit $x \in \mathbb{R}$ et soit x_n une suite de rationnels qui tend vers x. on a $f(x_n) = ax_n$ et en passant à la limite $f(x) = ax$.

Exercice 2.14 :

3 Suites récurrentes

Exercice 3.1 :

Etudier la limite de la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+u_n}$.

$u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{2x^2}{1+x}$. On a déjà étudié la fonction f qui est croissante. Ainsi u est monotone et $u_1 = \frac{8}{3} > u_0$ donc u est croissante. Par l'absurde si u converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors $l = \frac{2l^2}{1+l} \Leftrightarrow l = 0$ ou $l = 1$ mais c'est impossible car u part en croissant de 2. Donc la limite de u est $+\infty$.

Exercice 3.2 :

Exercice 3.3 :

Exercice 3.4 :

Exercice 3.5 :

Exercice 3.6 :